
LA LEMNISCATE DE FAGNANO ET LA MULTIPLICATION COMPLEXE

par

Ivahn Smadja

Université Paris Diderot - Paris 7 - CNRS UMR 7219

15 avril 2008

Résumé. — La naissance de la théorie des fonctions elliptiques remonte à la réception par Euler des travaux de Fagnano sur la lemniscate. À partir d’une hypothèse contestée de C. L. Siegel interprétant la formule du doublement de l’arc à la lumière de la multiplication complexe des fonctions elliptiques, cet article vise, en distinguant nettement « contexte de découverte » et « contexte de justification », à cerner la signification de la filiation conceptuelle de la préhistoire du théorème d’addition à la conception arithmétique-algébrique de la multiplication complexe au XIX^{ème} siècle.

Abstract (Fagnano’s Lemniscate and Complex Multiplication)

The birth of the theory of elliptic functions dates back to Euler’s reception of Fagnano’s works on the Lemniscate. Commenting on a disputed reading by C. L. Siegel of Fagnano’s formula in the light of complex multiplication, this article sets out to delineate « context of discovery » and « context of justification » in order to investigate the meaning of the conceptual filiation from the prehistory of Euler’s addition theorem to the XIXth century arithmetic algebraic conception of complex multiplication.

1. Introduction

Dans une note rédigée à l’occasion du 250^{ème} anniversaire de la naissance d’Euler⁽¹⁾, C. L. Siegel analyse la formule du doublement d’arc de lemniscate et avance l’hypothèse que Fagnano pourrait l’avoir obtenue en cherchant à rationaliser la différentielle lemniscatique, par analogie avec l’uniformisation de la

Classification mathématique par sujets (2000). — 01A45, 01A50, 01A55, 33E05, 33–04, 14K22.

Mots clefs. — lemniscate, intégrales elliptiques, fonctions elliptiques, théorème d’addition, multiplication complexe, Fagnano, Euler, Legendre, Abel, Jacobi, Kronecker, Siegel.

⁽¹⁾[Sie59]. Cf. Annexe B, pour la traduction de cette note.

racine carrée des polynômes du second degré. Du même coup, la reconstitution proposée permet de comprendre pourquoi le système de substitutions de Fagnano produit le doublement de l'arc en explicitant les propriétés sous-jacentes relatives à la multiplication complexe de l'intégrale lemniscatique. Quoique ces considérations aient été accueillies le plus souvent avec circonspection⁽²⁾, parce qu'elles paraissent imputer à Fagnano ce dont on ne saurait trouver nulle trace dans ses œuvres, nous pouvons toutefois convenir d'y distinguer deux ordres de questionnement, corrélés mais non réductibles l'un à l'autre. Car la question de la fabrique des substitutions qui concerne la démarche effectivement mise en œuvre pour les obtenir ne devrait pas en droit être confondue avec la question de leur justification *ex post*. S'il demeure difficile d'établir, avec quelque plausibilité, comment Fagnano a trouvé les substitutions qui ouvraient la voie au doublement de l'arc et si par conséquent la prudence est sans doute requise concernant le premier point, l'analyse de C.L. Siegel est néanmoins éclairante eu égard à la seconde perspective, parce qu'elle permet de comprendre la raison du statut privilégié accordé aux modules singuliers et donc de saisir, dans son principe, le sens de la conception arithmétique de la multiplication complexe des fonctions elliptiques défendue par Leopold Kronecker dans la seconde moitié du XIX^{ème} siècle⁽³⁾.

Nous nous proposons dans un premier temps de reconsidérer les résultats de Fagnano en les replaçant dans le contexte des méthodes et des problèmes propres aux mathématiques du XVII^{ème} siècle, de manière à reconstituer la démarche conduisant à la formule du doublement d'arc, aussi fidèlement qu'il est possible, en nous fondant uniquement sur l'analyse des sources. Nous montrerons comment chez Fagnano le théorème du doublement d'arc s'insère dans une théorie générale de la lemniscate, charpentée par un système de substitutions dont il faut saisir la cohérence d'ensemble pour apprécier plus exactement la manière dont s'y articulent propriétés algébriques et propriétés géométriques. Nous verrons ainsi que Fagnano s'inscrit dans une tradition de problèmes géométriques visant à mesurer les courbes par la comparaison des arcs (§2 et 3), et plus précisément qu'il obtient le doublement d'arc par enchaînement de substitutions parce qu'il cherche à rapporter l'arc de lemniscate à un autre arc de lemniscate en passant par un arc de parabole cubique (§ 4).

S'il est d'usage, depuis Jacobi, de faire remonter la naissance de la théorie des fonctions elliptiques à la réception des résultats de Fagnano, c'est que le

⁽²⁾Cf. par exemple [Ayo84], [Sch97].

⁽³⁾La série des mémoires consacrés à ce problème s'échelonne à partir de [Kro57].

« génie sûr » d'Euler, auquel C. L. Siegel se réfère comme à un idéal de la connaissance mathématique⁽⁴⁾, fut, en l'occurrence, de deviner, sans toutefois l'élucider pleinement, que la « raison cachée » du doublement d'arc était inhérente au système même des substitutions de sorte qu'il parvint à extraire des algorithmes de Fagnano la structure algébrique d'un théorème général d'addition. Nous montrerons alors dans un second temps, en développant les indications de Siegel, que la multiplication complexe celée dans les substitutions de Fagnano permet d'en reconnaître pleinement la justification en les interprétant comme isogénies (§5).

Mais puisque ces méthodes étaient inaccessibles à Fagnano et Euler, quelle anticipation du but à atteindre pouvait-elle les guider ? Plus généralement, comment rendre compte du caractère de ces recherches mathématiques auxquelles Euler attachait le plus haut prix parce qu'elles permettent de « promouvoir les fins de l'Analyse »⁽⁵⁾ et d'« aiguïser les forces de notre esprit »⁽⁶⁾ ? Pour tenter de cerner cette spécificité, nous comparerons la théorie de la lemniscate de Fagnano et Euler avec la manière dont, quelques décennies plus tard, Legendre envisage cette même courbe dans le cadre de sa théorie des fonctions elliptiques (§6). Des problèmes de mesure des courbes dans les mathématiques du XVII^{ème} siècle à la théorie des fonctions elliptiques du XIX^{ème} siècle, une transformation de sens s'opère en effet qui tient à un certain déplacement de l'accentuation, pour autant que l'on passe d'une approche géométrique à une approche analytique des intégrales elliptiques. La conséquence de ce changement de perspective affecte profondément la compréhension des objets et les fins que l'on s'assigne. Chez Fagnano et Euler, la démarche est tout entière polarisée par l'exigence spécifique de mesurer les courbes *par elles-mêmes* et donc corrélativement par une norme méthodologique requérant en quelque sorte l'homogénéité des intégrales elliptiques et imposant de ne jamais perdre de vue la nature et l'identité de la courbe sous-jacente dans les transformations d'intégrales. Dans la théorie de Legendre en revanche, la considération des courbes passe pour ainsi dire au second plan, au bénéfice de la classification des intégrales elliptiques et de leur réduction à des types. Les stratégies théoriques sont donc différentes selon qu'on s'attache, comme le fait Legendre, à cartographier tout le domaine des transformations entre intégrales elliptiques grâce à la construction d'échelles de modules ; ou que l'on cherche, comme

⁽⁴⁾Cf. Appendice A, sur C. L. Siegel et l'histoire des mathématiques.

⁽⁵⁾Cf. [Eul61b, p. 81-82] et *infra* §5.

⁽⁶⁾*Ibid.*

Euler, à saisir plus profondément la nature de la courbe en caractérisant les propriétés géométriques de celle-ci grâce aux relations algébriques entre intégrales mesurant les longueurs d'arc le long de cette même courbe. Revenir à la préhistoire de la théorie des fonctions elliptiques permet alors, conformément aux intuitions directrices de C. L. Siegel, de mieux comprendre et de distinguer différentes lignes de développement dans les mathématiques ultérieures. En réinterprétant la normalisation de Legendre dans le cadre de la théorie de la variable complexe, nous mettrons ainsi en lumière la différence entre deux approches du problème de la transformation des intégrales elliptiques, selon qu'on privilégie la plasticité géométrique-analytique ou le traitement algébrique-arithmétique. Cette seconde voie que choisit Euler lorsqu'il résout algébriquement l'équation différentielle $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$, est aussi celle qu'empruntent à sa suite Abel et Kronecker lorsqu'ils élaborent une théorie algébrique de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Retracer cette filiation permet alors de mieux appréhender en quel sens la forme d'arithmétisation que promeut Kronecker porte en elle une exigence d'articulation spécifique des contenus géométriques et arithmétiques qui prolonge la démarche d'Euler (§7).

2. Méthodes de construction et mesure de la lemniscate

Dans les deux courts mémoires de 1718, réunis sous le titre *Metodo per misurare la lemniscata*, Fagnano définit son objet d'étude, la mesure de la lemniscate, en relation avec les problèmes de construction tels qu'ils se présentent traditionnellement dans les mathématiques du XVII^e siècle.

Deux grands géomètres, Jakob et Johann Bernoulli ont rendu célèbre la lemniscate en se servant de ses arcs pour construire l'isochrone paracentrique, comme on peut le voir dans les Actes de Lipse de 1694. Il est visible qu'en mesurant la lemniscate au moyen de quelque autre courbe plus simple qu'elle, on obtient une construction plus parfaite non seulement de l'isochrone paracentrique, mais encore d'une infinité d'autres courbes qui, pour être construites peuvent dépendre de la lemniscate ; c'est pourquoi je me flatte que les mesures de cette courbe que j'ai découvertes et que j'exposerai en deux courts mémoires ne seront pas pour déplaire à ceux qui y entendent quelque chose⁽⁷⁾.

⁽⁷⁾ « Due sommi geometri sig. Giacomo, e sig. Giovanni fratelli Bernulli anno renduta celebre la lemniscata, servendosi de' suoi archi per costruire l'isochrona paracentrica, come può vedersi negli atti di Lipsia dell'anno 1694. Egli è visibile, che misurando la lemniscata mediante qualche altra curva di lei più semplice, si ottiene una costruzione più perfetta non

En 1694, Jakob et Johann Bernoulli furent conduits à la lemniscate à quelques mois d'intervalle et indépendamment l'un de l'autre. Le fait même qu'il y ait eu découverte indépendante atteste une prédilection partagée pour les constructions par rectification au détriment des constructions par quadrature dans le traitement des courbes transcendentes. Si ces deux géomètres dont la rivalité excluait toute communication de résultats en cours d'élaboration ont trouvé la même courbe à peu près en même temps, c'est en effet parce qu'ils étudiaient le même problème avec les mêmes moyens et en partageant les mêmes critères de hiérarchisation des méthodes de construction⁽⁸⁾. La comparaison des mémoires de l'année 1694 consacrés à la *curva elastica*, à l'isochrone paracentrique et à la lemniscate, met ainsi clairement en lumière les « critères d'adéquation » communs relatifs à la « représentation des courbes »⁽⁹⁾ et à la résolution des problèmes.

Le processus aboutissant à la lemniscate a son origine dans deux problèmes mécaniques qui font l'objet d'une série de mémoires publiés entre juin et octobre 1694 dans les *Acta Eruditorum*.

1. En juin, Jakob Bernoulli s'attaque au problème de la *curva elastica*. La courbe correspond à la forme que prend une lamelle élastique dont les

solo dell'isochrona paracentrica, ma ancora delle altre infinite curve, che per essere costruite possono dipendere dalla lemniscata; e però mi lusingo, che non sieno per dispiacere agl'intendenti le misure di questa curva da me scoperte, le quali esporrò successivamente in due schediasmi » [Fag18a, p. 343]. Pour tous les mémoires de Fagnano, la pagination est celle de l'édition [Fag50]. Sauf lorsqu'il existe une traduction de référence, nous donnons notre traduction en français des passages en latin, italien et allemand auxquels nous nous référons, en donnant le texte original en note.

⁽⁸⁾Cf. [Bos93, p. 101-111] sur les différents moments de cette séquence historique.

⁽⁹⁾Selon Henk Bos, l'étude de ces « critères d'adéquation » permet de mieux comprendre le sens des méthodes mises en œuvre dans les mathématiques du XVII^e siècle mais aussi les transformations des modes de pensée. Cf. [Bos81, p. 296] : « ...when is a new curve sufficiently known? Seventeenth-century mathematicians did not have a uniform definition of the concept of curve (nor apparently did they feel the need for such a definition) and therefore they had no standard form for specifying the curves they had in mind. In fact, there were many ways of specifying curves. One could, for instance, indicate how points on the curve could be traced, and (after analytic geometry had been introduced) one could give the equation of the curve. Some of the ways of describing curves were considered satisfactory, others less so, some not at all. I shall use the term « representation of curves » to mean ways of specifying curves which were thought to make the curves sufficiently known. This term was not used in the 17th century with that meaning; there was no term with that meaning then. Nevertheless the mathematicians did use the term « construction of curves » which has almost the same meaning but is more restricted. »

extrémités sont comprimées ou d'une solive sous tension. En faisant une hypothèse mécanique relative à l'élasticité des matériaux, la loi de flexion de Hooke, Bernoulli obtient une caractérisation de la famille des courbes planes dites élastiques par la propriété selon laquelle la courbure en tout point doit être proportionnelle à la distance à une droite donnée nommée directrice. La forme de la lamelle dépend de l'écartement des extrémités et de l'orientation qu'on leur donne, et les points d'inflexion sont tous alignés, sur la directrice, conformément à la caractérisation géométrique de la courbe au moyen de la courbure. Dans le *De curvatura laminæ elasticæ*⁽¹⁰⁾, Jakob Bernoulli donne alors une équation différentielle de la courbe $dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ en utilisant la propriété de la courbure définissant l'*elastica* et la définition de la courbure comme l'inverse du rayon du cercle osculateur. Puis, dans un second mémoire qu'il publie aussi en juin, il en donne une « construction par quadrature », c'est-à-dire qu'il intègre l'équation différentielle par une méthode géométrique consistant à égaliser l'aire d'un rectangle ay et l'aire sous la courbe $\int \frac{ax^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, mais il ne s'y résout pour ainsi dire que faute de mieux : « *quod sufficit ad constructionem deinde, saltem per quadraturas, efficiendam* »⁽¹¹⁾.

2. Dans ce second mémoire⁽¹²⁾, Jakob Bernoulli a en outre l'idée d'utiliser l'*elastica* pour résoudre le problème de l'isochrone paracentrique formulé par Leibniz en 1689 à l'occasion de la solution qu'il donnait lui-même au problème de l'isochrone simple.

Si l'un d'eux se plaignait qu'on lui a désormais coupé l'herbe sous le pied, il pourra chercher une autre isochrone voisine de celle-ci, sur laquelle un corps s'éloigne, ou se rapproche, uniformément, non comme on l'a supposé jusqu'ici, d'une ligne horizontale, mais d'un point déterminé. Le problème serait donc : *Trouver la courbe sur laquelle la chute d'un corps pesant l'éloigne ou le rapproche uniformément d'un point donné*⁽¹³⁾.

En utilisant la loi de la conservation de la force vive, Bernoulli obtient une équation différentielle $\frac{d(ar)}{2\sqrt{ar}} = \frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$ qu'il intègre en interprétant cette fois-ci le membre de droite comme l'élément d'arc d'une courbe supposée déjà connue, l'*elastica*, privilégiant ainsi, dans ce second mémoire, une « construction par rectification » dans le cas de l'isochrone paracentrique, mais non dans le cas

⁽¹⁰⁾ [Ber94b].

⁽¹¹⁾ [Ber94c, p. 178].

⁽¹²⁾ [Ber94c].

⁽¹³⁾ Leibniz, De Linea isochrona. *Acta Erud.* 1689, traduction française dans [Lei89, p. 165].

de l'*elastica* pour laquelle une « construction par quadrature » était donnée, dans le premier mémoire, comme un pis-aller.

3. Cependant, la solution de juin n'est pas pleinement satisfaisante parce qu'elle fait dépendre la résolution du problème de l'isochrone paracentrique d'une courbe transcendante dont l'équation ne peut être établie qu'en faisant une hypothèse mécanique relative à l'élasticité des corps. Aussi Jakob Bernoulli propose-t-il quelques mois plus tard⁽¹⁴⁾ une autre construction de l'isochrone paracentrique au moyen d'une toute nouvelle courbe inventée pour répondre aux réquisits théoriques du problème, la lemniscate. Comme en juin, il s'agit toujours d'une construction par rectification mais désormais au moyen d'une courbe algébrique et non plus d'une courbe transcendante. De son côté, Johann Bernoulli s'engage dans la même direction et recherche lui aussi une courbe algébrique qui permette de rectifier l'isochrone paracentrique⁽¹⁵⁾. Ainsi les frères Bernoulli parviennent-ils tous deux par des chemins différents à la lemniscate dont l'équation algébrique en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

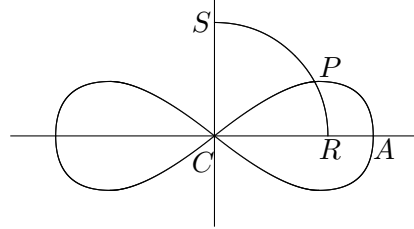
et qui a la « forme d'un huit renversé ∞ , d'un lacet noué, d'un $\lambda\eta\mu\nu\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\varsigma$, ou en français, d'un *noeud de ruban* »⁽¹⁶⁾. Si l'on note ϱ la corde CP et ϑ l'angle $\angle RCP$, on montre à partir de l'équation de la courbe en coordonnées polaires

$$\varrho^2 = \cos 2\vartheta$$

que la longueur d'arc CP , notée s , interceptée sur la courbe par le cercle de rayon ϱ est exprimée par l'intégrale

$$s = \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}}$$

et l'on établit facilement que l'élément d'arc de la lemniscate est égal à celui de l'*elastica*⁽¹⁷⁾.



⁽¹⁴⁾ [Ber94a].

⁽¹⁵⁾ [Ber94d].

⁽¹⁶⁾ Cf. [Ber94a]. Cette courbe était déjà connue des mathématiciens de l'Antiquité comme l'une des quatre formes qualitativement distinctes de la section de spire, obtenue en prenant l'intersection avec un plan de la surface engendrée par la rotation d'un cercle autour d'un axe tangent à ce même cercle : les sections spiriques de Perseus (circa 150 av. J.C.). Cf. [Brieskorn & Knörrer 1981], p. 19-22. Mais il semble que Bernoulli n'en ait pas eu connaissance. Cf. [Sch97, p. 1].

⁽¹⁷⁾ Cf. note de Cramer à Op. LX, *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, éd. par Herman H. Goldstine, Birkhäuser, 1991, Jac. Op. LX, p. 191. « *Igitur Lemniscata*

Jakob Bernoulli explicite ainsi dans le mémoire de septembre les principes qui le guident pour hiérarchiser les méthodes de construction :

On a trois procédures principales pour construire des courbes mécaniques ou transcendentes. La première consiste en la quadrature des aires curvilignes, mais elle est peu adaptée à la pratique. Il est préférable de procéder par la rectification des courbes algébriques ; car dans la pratique on peut plus précisément et plus aisément rectifier les courbes, à l'aide d'un fil ou d'une petite chaîne enroulée sur la courbe, que quarrer les surfaces. J'apprécie tout autant les constructions qui procèdent sans aucune rectification ou quadrature, par la simple description d'une courbe mécanique dont on peut trouver géométriquement, sinon tous, au moins une infinité de points arbitrairement proches les uns des autres ; on compte parmi elles la logarithmique et peut-être encore d'autres courbes de ce genre. Mais la meilleure méthode, pour autant qu'elle soit applicable, est celle qui fait appel à une courbe que la nature produit elle-même sans aucun artifice, d'un mouvement rapide et pour ainsi dire instantané, au premier coup d'œil du géomètre [*absque arte motu quodam celerrimo & quasi instantaneo ad nutum Geometræ*]. Car toutes les méthodes citées auparavant exigent des courbes dont la construction - qu'elle soit exécutée par le dessinateur d'un mouvement continu ou par l'invention de plusieurs points - est d'ordinaire trop lente et trop pénible. Aussi j'estime que les constructions des problèmes qui supposent la quadrature d'une hyperbole ou la description d'une logarithmique sont *ceteris paribus* moins favorables que celles qui se font à l'aide de la caténaire ; car une chaîne prendra d'elle-même la forme de celle-ci avant qu'on ne puisse entamer la construction des autres⁽¹⁸⁾.

Selon la conception de Bernoulli, on peut donc distinguer trois critères d'adéquation qui jouent concurremment⁽¹⁹⁾ :

1. l'exigence de ramener la composante transcendante de la construction, quadrature ou rectification, à une courbe simple, par exemple une conique ;

potuit pro Elastica adhiberi ad constructionem Isochronæ, hoc solum, discrimine quod recta AE, quæstius erat abscissa, illius esse debeat subtendens ». Il suffit en effet en partant de l'équation différentielle de l'*elastica* $dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ de calculer $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ pour obtenir la même expression de l'élément d'arc que pour la lemniscate.

⁽¹⁸⁾[Ber94a, p. 188]. La citation de Bernoulli que nous reproduisons est traduite en français dans *Die Werke von Jakob Bernoulli*, éd. par David Speiser, Birkhäuser, 1999, tome 5. Commentaires de M. Mattmüller. Observations sur Med CCXIX, p. 362.

⁽¹⁹⁾Cf. [Bos93, p. 109]. Henk Bos rassemble les deuxième et troisième points sous le seul titre des considérations pratiques liées à l'opération de mesure.

2. la préférence pour la rectification au détriment de la quadrature parce qu'il est plus simple de mesurer une longueur le long d'une courbe que de quarrer une surface ;

3. la préférence pour les courbes que la nature produit d'elle même immédiate-ment comme la caténaire⁽²⁰⁾, plutôt que pour les courbes que le géomètre est contraint de tracer au moyen d'artifices, voire même qu'il ne peut que construire par points.

La pluralité des critères n'exclut cependant pas la cohérence, et la hiérarchisa-tion des méthodes d'intégration permet de mettre en ordre la connaissance dans le cas où il y a réciprocity des constructions⁽²¹⁾.

Le fait que les rectifications soient préférées aux quadratures, partout où elles sont possibles, conduit cependant à des problèmes d'un genre nouveau lorsque l'élément d'arc des courbes que l'on cherche à mesurer n'est pas intégrable par les méthodes ordinaires, comme c'est le cas pour l'élément d'arc de lemniscate $ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Depuis la fin du XVIIIème siècle, l'attention des mathématiciens s'était en effet portée sur ces intégrales, apparues à l'occasion de problèmes de rectification, de la forme $\int f(t, \sqrt{p(t)}) \cdot dt$, où f est une fonction rationnelle de t et de $\sqrt{p(t)}$, et $p(x)$, un polynôme de degré 3 ou 4, sans facteur multiple. Comme de telles intégrales, dites elliptiques⁽²²⁾, ne correspondaient à aucune des fonctions élémentaires répertoriées, elles ne pouvaient pas être intégrées par les méthodes usuelles du calcul intégral et firent l'objet d'une étude spécifique qui devait aboutir à la fin du XVIIIème siècle à la classification de Legendre⁽²³⁾ :

⁽²⁰⁾La caténaire ou chaînette est la courbe qui correspond à la forme que prend une chaînette maintenue par ses deux extrémités sous la seule action de la gravité.

⁽²¹⁾Cf. [Bos93, p. 109]. On peut par exemple construire la caténaire par quadrature de l'hyperbole et inversement la quadrature de l'hyperbole s'obtient à partir de la caténaire. Par conséquent, dans la mesure où les deux courbes peuvent être ainsi construites l'une au moyen de l'autre, il est préférable selon Bernoulli de ramener les constructions à la caténaire plutôt qu'à l'hyperbole.

⁽²²⁾L'intégrale obtenue par rectification de l'ellipse [Wallis 1665] est de ce type

$$\int \frac{(1 - e^2 x^2) dt}{\sqrt{(1 - e^2 x^2)(1 - x^2)}}$$

de là vient la dénomination pour la classe entière des intégrales elliptiques.

⁽²³⁾A.-M. Legendre développe la théorie des intégrales elliptiques dans ses deux grands traités, les *Exercices de calcul intégral* qui paraissent en trois volumes en 1811, 1817 et 1819, et le *Traité des fonctions elliptiques* qui constitue une version remaniée et étendue des

$$\begin{array}{ll}
\text{première espèce} & \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
\text{seconde espèce} & \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx \\
\text{troisième espèce} & \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}
\end{array}$$

Mais de la fin du XVII^{ème} siècle aux travaux de Legendre, une transformation s'opère dans les méthodes mises en œuvre dans la mesure où l'on passe d'une conception géométrique à une conception analytique des intégrales elliptiques. Dans la filiation des travaux de Jakob et Johann Bernoulli, les recherches de Fagnano sont toutefois encore caractérisées par une orientation géométrique marquée : les problèmes sont en effet géométriques et l'exigence de conférer une signification géométrique aux intégrales elliptiques est constamment présente.

On peut distinguer, à la suite d'A. Enneper⁽²⁴⁾, trois grands types de problèmes concernant le traitement des intégrales elliptiques dans les mathématiques des XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles :

1. La construction géométrique des équations différentielles.

Lorsque l'on a affaire à des équations qui renferment des différentielles elliptiques, il est naturel de rechercher des constructions par quadrature ou par rectification au moyen de courbes plus simples, les sections coniques. Dans le cas de la *curva elastica* par exemple, Jakob Bernoulli exprime certaines réserves quant au succès possible d'une telle entreprise : « *quant à moi, j'ai de sérieux motifs de soupçonner que la construction de notre courbe ne dépend d'aucune section conique, qu'il s'agisse de quadrature ou de rectification* »⁽²⁵⁾ Au cours du XVIII^{ème} siècle, Maclaurin et d'Alembert se sont attaqués à cette question ainsi qu'à d'autres du même genre. Dans son *Treatise of Fluxions* (1742), Maclaurin dément Bernoulli et établit ainsi la rectification de l'arc d'*elastica* au moyen de l'hyperbole équilatère⁽²⁶⁾. À peu près à la même époque d'Alembert obtient des résultats plus généraux. La seconde partie des *Recherches sur le*

Exercices et dont les trois tomes sont respectivement publiés en 1825, 1826 et 1830. Toutefois, la classification des intégrales elliptiques en trois espèces apparaît pour la première fois dans le *Mémoire sur les transcendentes elliptiques* de 1793. Cf. [Hou78, p. 295].

⁽²⁴⁾ [Enn90, Note III, p. 524].

⁽²⁵⁾ [Ber94b]. « *Ego ob graves causas suspicor curvae nostrae constructionem nullius sectionis conicae, seu quadratura seu rectificatione pendere* ».

⁽²⁶⁾ Cf. [Enn90, p. 526], où l'on trouve la citation suivante de Maclaurin dans le *Treatise of Fluxions* (1742) : « *But it is constructed by the rectification of the equilateral hyperbola, for if the base of a figure be always taken equal to the perpendicular from the centre on the tangent of such an hyperbola, and the ordinate equal to the excess of the tangent terminated by that perpendicular above the arc intercepted betwixt the vertex of the hyperbola and the point of contact, then the figure shall be the elastic curve* ».

calcul intégral (1746) traite en effet des différentielles dont les intégrales se réduisent au moyen de substitutions simples et d'intégrations partielles aux intégrales qui expriment les arcs d'ellipse et d'hyperbole. Lorsqu'une expression différentielle se laisse réduire à la différentielle d'un élément d'arc d'une de ces courbes distinguées, ellipse ou hyperbole, d'Alembert nomme le procédé « intégrer au moyen de l'ellipse ou de l'hyperbole ». Comme le note Enneper, l'approche de d'Alembert est « purement analytique » et son mémoire est « traversé par une pensée orientée vers la classification des différentielles elliptiques, semblable à celle qui conduit Legendre plus tard à rendre un service si important au développement de l'analyse »⁽²⁷⁾. Ainsi l'impulsion donnée par les problèmes géométriques de construction conduit-elle progressivement, dans la première moitié du XVIII^{ème} siècle, à des considérations analytiques pour lesquelles comptent principalement la réduction des différentielles les unes aux autres et leur classification.

2. La comparaison d'arcs de courbes différentes.

À défaut d'une construction par rectification ou par quadrature, une autre démarche consiste à comparer les arcs des courbes étudiées avec des arcs de sections coniques, lorsqu'il y a une relation géométrique entre ces courbes et les coniques qui permet de ramener la mesure des premières à celle des secondes, par exemple dans le cas des courbes développées. Le théorème de Landen qui énonce qu'un arc d'hyperbole peut être exprimé au moyen de deux arcs d'ellipse en fournit un exemple typique.

3. La comparaison des arcs d'une seule et même courbe.

Selon une autre approche, la mesure des courbes n'est ni rectification, ni réduction aux arcs d'ellipse ou d'hyperbole, mais mesure de la courbe par elle-même. Ce troisième genre de problèmes consiste en effet à rapporter les uns aux autres différents arcs d'une seule et même courbe, lesquels peuvent être mesurés à partir de différents points distingués de la courbe. Cette idée de comparer entre eux différents arcs, non nécessairement congruents, des mêmes courbes apparaît dès les débuts du calcul intégral, par exemple chez Jakob Bernoulli⁽²⁸⁾.

Fagnano s'inscrit dans ces différentes traditions de problèmes et en applique les méthodes à la mesure de la lemniscate. Les deux premiers théorèmes du

⁽²⁷⁾ Cf. [Enn90, p. 527].

⁽²⁸⁾ Dans le « Specimen calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis » paru dans les *Acta Eruditorum* en 1691. Repris dans *Die Werke von Jakob Bernoulli*, éd. par David Speiser, Birkhäuser, 1999, tome 5, Op. XLI, p. 32-47. Cf. [Enn90, p. 527].

premier mémoire relèvent ainsi de la seconde orientation, la comparaison d'arcs de courbes différentes.

Soit en effet la lemniscate $CQACFC$ de semi-axe $CA = a$, d'équation $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ en prenant les abscisses x horizontalement sur l'axe FA et les ordonnées y sur l'axe CD à partir de l'origine C . Fagnano suppose que si l'on note z la corde indéterminée $CQ = \sqrt{x^2 + y^2}$, la valeur de l'arc direct s'exprime ainsi

$$\text{arc } CQ = \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$$

et la valeur de l'arc inverse

$$\text{arc } QA = \text{arc } CA - \text{arc } CQ = \int \frac{-a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$$

Fagnano considère l'ellipse $ADFNA$ d'axes $CF = a$ et $CD = a\sqrt{2}$ et pose z l'abscisse indéterminée CH égale à la corde CQ de la lemniscate, puis élève l'ordonnée HI parallèle à l'axe CD . On suppose connue l'expression de l'arc direct de l'ellipse

$$\text{arc } DI = \int \frac{\sqrt{a^2 + z^2} dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

comme l'expression de l'arc inverse

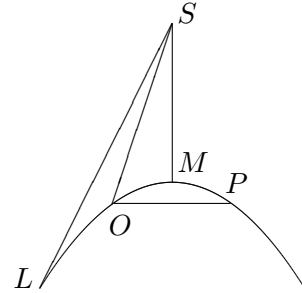
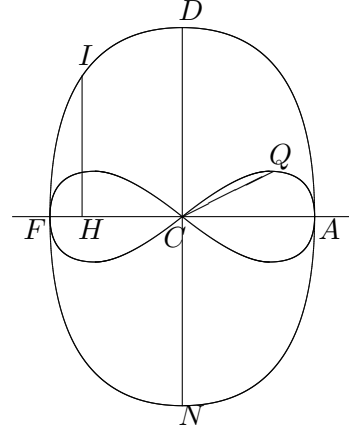
$$\text{arc } DF - \text{arc } DI = \int \frac{-\sqrt{a^2 + z^2} dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

Si maintenant LMP est l'hyperbole équilatère de semi-axe $SM = a$, et t le rayon indéterminé SO , on suppose connue l'expression de l'arc MO

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - a^4}}$$

Fagnano donne alors deux théorèmes qui énoncent que si les deux quantités qui représentent les cordes sont liées par une certaine équation algébrique alors les arcs de lemniscate, d'ellipse et d'hyperbole équilatère peuvent s'exprimer les uns en fonction des autres.

Théorème I. Soient les deux équations (1) et (2) ci-dessous, si la première est vérifiée, alors la seconde l'est aussi :



$$(1) \quad t = \frac{a\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

$$(2) \quad \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int \frac{dz\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - a^4}} - \frac{zt}{a}$$

Fagnano indique que la démonstration de ce théorème s'obtient par différentiation et substitution, en remplaçant t et dt par leurs valeurs respectives en fonction de z et dz , elles-mêmes tirées de l'équation (1). Puis il en précise la signification géométrique dans un corollaire.

Corollaire. Soit la corde $CQ = z$ sous la lemniscate égale à l'abscisse $CH = z$ du point I sur l'ellipse et soit $SO = t$ le rayon joignant le centre S au point O sur l'hyperbole LMP , si la corde z et le rayon t sont liés par la relation (1) alors l'équation (2) peut être interprétée comme une relation exprimant la longueur de l'arc direct de lemniscate en fonction de la longueur d'un arc d'ellipse, d'un arc d'hyperbole et d'un segment droit constructible à partir des droites données $CQ = z$ et $SO = t$:

$$(3) \quad \text{arc } CQ = \text{arc } DI + \text{arc } MO - \frac{zt}{a}$$

Dans un scolie, Fagnano considère ensuite plus précisément les bornes des intégrales de la seconde équation. Si on suppose $z = 0$, l'arc direct CQ sur la lemniscate comme l'arc direct DI sur l'ellipse s'annulent, et par l'équation (2), il est clair qu'alors $t = a$, c'est-à-dire $SO = SM$; par suite l'arc hyperbolique MO s'annule lui aussi. Comme ce que Fagnano nomme l' « expression rectiligne », à savoir le terme de l'équation (2) constructible à la règle et au compas à partir de la donnée des droites a , z et t -i.e. en l'occurrence $\frac{zt}{a}$ - s'annule aussi, la seconde équation est identiquement nulle, « et tout cela est un indice certain que l'équation (3) est complète et n'a pas besoin de l'ajout ou de la soustraction d'aucune quantité constante »⁽²⁹⁾. Mais si maintenant, on suppose $z = a$, alors l'arc direct CQ est égal au quadrant de lemniscate CQA et l'arc elliptique à l'arc DIF , en outre, selon l'équation (1), le rayon t devient infini, et avec lui l'arc d'hyperbole MO , « c'est pourquoi il semble impossible de parvenir à connaître par cette voie la valeur du quadrant de

⁽²⁹⁾[Fag18a, p. 345] : « e tutto ciò è un certo indizio, che l'equazione (3) è completa, e non abbisogna dell'aggiunta, o sottrazione d'alcuna quantità costante ».

lemniscate exprimée en quantités finies, et par conséquent la mesure de cette courbe ne peut pas être dite encore parfaitement découverte »⁽³⁰⁾.

De manière analogue, le second théorème de Fagnano met en relation des expressions analytiques qui correspondent aux arcs inverses.

Théorème II. Soient les deux équations (4) et (5) ci-dessous, si la première est vérifiée, alors la seconde l'est aussi :

$$(4) \quad r = \frac{a^2}{z}$$

$$(5) \quad \int \frac{-a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int \frac{-dz\sqrt{a^2 + z^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - a^4}} - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$$

Dans ce cas, comme dans le précédent, on démontre la seconde équation par différentiation et substitution des valeurs de r et de dr déduites de la première équation.

Corollaire. Si on pose la corde $CQ = z = CH$ et le rayon $SL = r$, et si z et r sont liées par la relation (4) alors en interprétant géométriquement les intégrales par les arcs correspondants dans l'équation (5), on obtient :

$$\text{arc } QA = \text{arc } IF + \text{arc } ML - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$$

De la même manière, Fagnano prend en compte la valeur possible des bornes des intégrales dans un premier scolie au théorème. Si on pose $z = a$, alors l'arc inverse QA sur la lemniscate et l'arc inverse IF sur l'ellipse s'annulent, tout comme l'arc hyperbolique ML , puisque par l'équation (4), le rayon $r = SL$ devient dans ce cas égal au semi-axe SM . Dès lors que, comme précédemment, l'« expression rectiligne », $-\frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$ s'annule aussi, l'équation (5) est complète. Cependant, l'équation devient indéterminée cette fois-ci pour la valeur $z = 0$, car alors si les arcs de lemniscate et d'ellipse correspondent respectivement aux quadrants des courbes considérées, d'après l'équation (4), la valeur de l'arc hyperbolique ML devient quant à elle infinie.

La solution de Fagnano pour contourner cette difficulté et mesurer la longueur du quadrant de lemniscate exprimée en quantités finies consiste naturellement à additionner l'arc direct CQ et l'arc inverse QA de lemniscate, c'est-à-dire à faire la somme des termes à gauche d'une part et des termes à droite dans les équations (2) et (5). Si on trace la parallèle OP au second axe de l'hyperbole équilatère, on remarque que par symétrie l'arc MO est égal à

⁽³⁰⁾[Fag18a, p. 345] : « e pero sembra impossibile di giungere a conoscere per questa strada il valore del quadrante della lemniscata espresso in quantità finite, e per conseguenza la misura di questa curva non può dirsi ancora perfettamente scoperta ».

l'arc MP , par suite l'arc LMP est égal à la somme de l'arc MO et de l'arc ML . On peut donc exprimer la longueur du quadrant de lemniscate CQA en fonction du quadrant d'ellipse DIF , de l'arc d'hyperbole LMP et d'une quantité formée de la somme des « expressions rectilignes » des théorèmes *I* et *II*, à savoir $-\frac{zt}{a} - \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4}$. Mais Fagnano remarque qu'on peut simplifier cette expression en utilisant l'équation (1), i.e. $t = \frac{a\sqrt{a^2+z^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}$ de manière à obtenir

$$\frac{zt}{a} + \frac{1}{z}\sqrt{a^4 - z^4} = \frac{at}{z}$$

Il en tire, à titre de corollaire, cette propriété remarquable que la longueur de la lemniscate entière est égale à la longueur de l'ellipse circonscrite entière plus le quadruple de l'arc d'hyperbole équilatère LMP moins $\frac{4at}{z}$.

3. Polynômes négativement semblables et relation de Fagnano

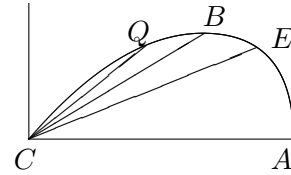
Si les deux premiers théorèmes du premier mémoire de Fagnano concernent des problèmes du second genre, selon la classification proposée par A. Enneper, le troisième et dernier théorème de ce premier mémoire relève en revanche du troisième genre de problèmes, la comparaison des arcs d'une seule et même courbe.

Théorème III. Soient les deux équations (6) et (7) ci-dessous, si la première est vérifiée, alors la seconde l'est aussi :

$$(6) \quad u = \frac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$(7) \quad \int \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int \frac{-a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

La démonstration s'obtient, comme pour les deux premiers théorèmes, par différentiation et substitution. Mais désormais la signification géométrique renvoie à la mesure de la lemniscate par elle-même : si les deux cordes $CQ = z$ et $CE = u$ sont liées par l'équation (6), alors, comme nous le verrons plus bas, la seconde expression exprime l'égalité de l'arc direct CQ et de l'arc inverse EA .



Comme pour les théorèmes précédents, Fagnano vérifie que l'équation qui exprime l'égalité de l'arc direct et de l'arc inverse est bien complète. Si $z = 0$, c'est-à-dire si l'arc direct CQ est nul, alors d'après l'équation (6), la corde CE est égale au demi-axe, $u = a$, et donc l'arc inverse EA est nul lui aussi.

La division du quadrant de lemniscate en deux parties égales est une conséquence immédiate de l'égalité entre l'arc direct et l'arc inverse. Fagnano donne ainsi, à titre de corollaire, la méthode pour résoudre le problème de division qu'il énonce ainsi : « *Tagliare per mezzo il quadrante della lemniscata* »⁽³¹⁾. Il suffit en effet de poser les deux équations

$$z = u$$

$$u = \frac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

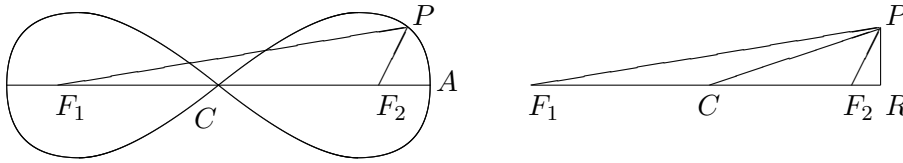
c'est-à-dire d'égaliser à la fois les arcs CQ et EA d'une part et les cordes qui les sous-tendent d'autre part, de sorte que les points Q et E coïncident en un point B qui, par construction, divise le quadrant en deux parties égales. La racine de l'équation biquadratique ainsi formée

$$z^4 + 2a^2z^2 - a^4 = 0$$

est une « expression rectiligne », $z = \sqrt{a^2\sqrt{2} - a^2}$, et par conséquent la corde cherchée z qui détermine le point B est constructible à la règle et au compas.

Tentons à présent d'expliciter la démarche qui conduit Fagnano à la substitution $u = \frac{a\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$ et à l'égalité de l'arc direct et de l'arc inverse à propos de laquelle il écrit : « Cette propriété insigne de la lemniscate a été par moi découverte et exposée de manière différente dans ma méthode pour rectifier la différence des arcs irrectifiables de parabole »⁽³²⁾.

La lemniscate est définie par la propriété géométrique suivante. Soient deux points F_1 et F_2 , tels que $CF_1 = CF_2 = d$, notons $F_1P = r_1$ et $F_2P = r_2$ les distances respectives d'un point P aux deux foyers, et considérons le lieu géométrique des points P tels que $r_1.r_2 = c$, où c est une constante.



⁽³¹⁾[Fag18a, p. 348].

⁽³²⁾[Fag18a, p. 347] : « Questa insigne proprietà della lemniscata è stata da me scoperta, ed esposta in maniera diversa nel mio metodo per rettificare la differenza degli archi in infinite specie di parabole irretificabili ». Le mémoire auquel il est fait allusion est [Fag15].

En prenant les abscisses le long de l'axe F_1F_2 à partir du centre C de la lemniscate et les ordonnées perpendiculairement, on remarque que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + d)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - d)^2 + y^2 \end{aligned}$$

d'où il vient, par substitution de ces valeurs dans $r_1.r_2 = c$,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) + d^4 = c^2$$

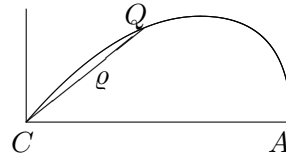
L'équation de la lemniscate en coordonnées cartésiennes mentionnée plus haut s'obtient immédiatement en prenant $c = d^2$, c'est-à-dire en choisissant dans le feuilletage de courbes celle qui possède un point double à l'origine :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

La longueur du grand axe de la lemniscate $CA = a$ et la distance des foyers au point double CF_1, CF_2 sont alors liées par la relation $a = \sqrt{2}d$, et l'équation en coordonnées polaires $\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ peut être déduite de l'équation en coordonnées cartésiennes en faisant les substitutions appropriées⁽³³⁾.

Il y a maintenant deux manières de déterminer la longueur d'arc de lemniscate selon qu'on la mesure à partir du point double ou à partir de l'extrémité du demi-axe. Dans le premier cas, c'est la corde qui est la grandeur significative et on intègre l'élément d'arc⁽³⁴⁾ par rapport à la variable ϱ de façon à obtenir une expression de l'arc direct

$$\text{arc } CQ = \int_0^{\varrho} \frac{ad\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}}$$

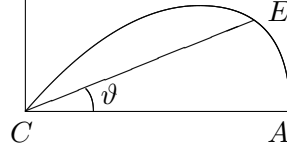


⁽³³⁾ i.e. $x = \varrho \cos \vartheta$ et $y = \varrho \sin \vartheta$, où $\varrho = CP$ et $\vartheta = \widehat{ACP}$.

⁽³⁴⁾ En substituant $\varrho^2 = x^2 + y^2$ dans l'équation en coordonnées cartésiennes $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, on obtient $x^2 = \frac{a^2\varrho^2 + \varrho^4}{2a^2}$ et $y^2 = \frac{a^2\varrho^2 - \varrho^4}{2a^2}$, d'où l'on tire, par différentiation et substitution, l'expression recherchée de l'élément d'arc $\frac{ad\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}}$.

Dans le second cas en revanche, on choisit d'exprimer l'élément d'arc⁽³⁵⁾ en fonction de l'angle au centre ϑ en sorte que l'intégration donne la mesure de l'arc inverse

$$\text{arc } EA = \int_0^{\vartheta} \frac{a d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$



Dans l'équation en coordonnées polaires de la courbe, $\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$, on peut supposer que $a = 1$. Il est en effet légitime de ne prendre en compte que ce cas simple car on peut toujours obtenir par homothétie la lemniscate de demi-axe a , pour toute valeur de a , à partir de la lemniscate dont le demi-axe est l'unité. La relation simple entre la corde et l'angle qu'exprime l'équation de la courbe suggère alors assez naturellement le choix d'une quantité auxiliaire. Puisqu'en effet les deux variables significatives correspondant aux deux mesures de l'arc de lemniscate sont liées par l'équation $\varrho = \sqrt{\cos 2\vartheta}$, on peut avec une certaine plausibilité supposer qu'il était pour Fagnano dans l'ordre des choses de chercher à exprimer les différentielles en fonction d'une même quantité auxiliaire ξ telle que

$$\varrho = \sqrt{\xi}, \quad \xi = \cos 2\vartheta$$

Les deux substitutions donnent ainsi lieu respectivement aux transformations suivantes

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}} = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi - \xi^3}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = \frac{-d\xi}{2\sqrt{\xi - \xi^3}}$$

et la différence de signe est cohérente avec l'interprétation géométrique qui associe des arcs mesurés en sens inverse aux intégrales correspondant aux

⁽³⁵⁾ En dérivant les coordonnées polaires $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$ par rapport à ϑ , on obtient $\dot{x} = \dot{\varrho} \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta$, $\dot{y} = \dot{\varrho} \sin \vartheta + \varrho \cos \vartheta$, d'où l'on déduit que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2$. De l'équation en coordonnées polaires de la lemniscate $\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$, on tire $\frac{d(\varrho^2)}{d\vartheta} = 2\dot{\varrho}\varrho = -2a^2 \sin 2\vartheta$, et par suite $4\dot{\varrho}^2 \varrho^2 = 4a^4 \sin^2 2\vartheta$. Mais comme $\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$, on en déduit que $\dot{\varrho}^2 = \frac{a^4 \sin^2 2\vartheta}{a^2 \cos 2\vartheta}$. De là suit la valeur recherchée de l'élément d'arc, puisque par substitution on obtient $\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 = \frac{a^2 \sin^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} + a^2 \cos 2\vartheta = \frac{a^2}{\cos 2\vartheta}$ et donc $ds = \sqrt{\dot{\varrho}^2 + \varrho^2} \cdot d\vartheta = \frac{a d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$.

deux expressions alternatives de l'élément d'arc

$$\begin{aligned} \text{arc } CQ &= a \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^4}} = a \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi-\xi^3}} \\ \text{arc } QC &= a \int_{\vartheta}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = a \int_{\xi}^0 \frac{-d\xi}{2\sqrt{\xi-\xi^3}} \end{aligned}$$

Poser l'égalité des arcs CQ et EA revient alors à poser l'équation

$$\int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^4}} = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

d'où l'on déduit en transformant les termes de gauche et de droite par les substitutions respectives $\varrho = \sqrt{\xi}$ et $\nu = \cos 2\vartheta$, cette seconde équation, où $0 \leq \nu \leq 1$

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi-\xi^3}} = \int_1^{\nu} \frac{-d\nu}{2\sqrt{\nu-\nu^3}}$$

Par suite, le problème de la division du quadrant de lemniscate en deux parties égales se ramène en définitive au problème consistant à trouver une substitution $\xi = \phi(\nu)$ telle que

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\xi^3}} = \int_{\nu}^1 \frac{d\nu}{\sqrt{\nu-\nu^3}}$$

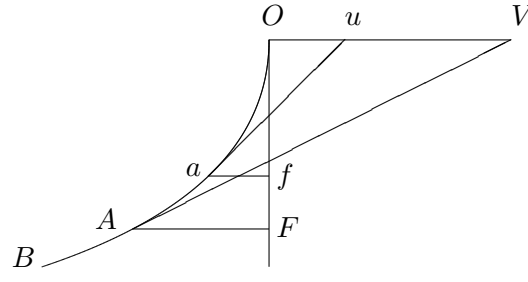
Or en 1718 Fagnano disposait déjà d'une telle substitution puisque ce problème est résolu dans un mémoire antérieur de 1715, grâce à un théorème algébrique parfaitement général portant sur la transformation d'un polynôme en un polynôme négativement semblable. Fagnano définit ainsi cette notion importante :

Un polynôme sera dit transformé en un autre polynôme négativement semblable, quand multipliant le premier par le signe positif, et l'autre par le signe négatif, on trouve que l'un est donné par sa variable, comme l'autre par la sienne propre, par exemple, si le binôme $\frac{x^{cm} dx}{\sqrt{x^m+1}}$ est changé en cet autre $\frac{-z^{cm} dz}{\sqrt{z^m+1}}$, il sera dit transformé en un autre binôme négativement semblable⁽³⁶⁾.

⁽³⁶⁾[Fag15, p. 319-320]. « Un polinomio si dirà trasformato in un altro polinomio negativamente simile, quando moltiplicando il primo col segno positivo, e l'altro col segno negativo, si ritrova, che l'uno è dato per la sua variabile, come l'altro per la propria, verbigrizia, se il binomio $\frac{x^{cm} dx}{\sqrt{x^m+1}}$ è cangiato in questo altro $\frac{-z^{cm} dz}{\sqrt{z^m+1}}$ egli si dirà trasformato in un altro binomio negativamente simile. »

L'objet principal du mémoire est d'exposer une méthode nouvelle grâce à laquelle la différence de deux arcs irrectifiables de parabole peut être rectifiée, ou en d'autres termes égalisée à une expression rectiligne, c'est-à-dire une quantité constructible à la règle et au compas à partir de segments de droite. Fagnano procède à des généralisations successives en considérant des différentielles de plus en plus élaborées à partir du cas simple de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{x^m+1}}$ dont les propriétés algébriques correspondent aux propriétés géométriques d'une parabole OAB d'équation $x^{\frac{m+2}{2}} = \frac{m+2}{2}y$.

Considérons deux points d'abscisses respectives $OF = x$ et $Of = z$ et d'ordonnées FA, fa , on trouve assez facilement par le calcul l'expression des arcs⁽³⁷⁾ OA, Oa , et des tangentes⁽³⁸⁾ AV, au , de façon à obtenir

$$\begin{aligned} \text{arc } OA &= \int \sqrt{1+x^m}.dx \\ \text{arc } Oa &= \int \sqrt{1+z^m}.dz \\ AV &= x\sqrt{1+x^m} \\ au &= z\sqrt{1+z^m} \end{aligned}$$


Fagnano montre alors qu'on peut exprimer la somme des intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^m+1}} + \int \frac{dz}{\sqrt{z^m+1}}$$

en fonction des arcs et des tangentes, et plus précisément que cette somme est égale à

$$\frac{m+2}{m}(OA + Oa) - \frac{2}{m}(AV + au)$$

La démonstration est de type calculatoire et consiste à dériver les deux membres de l'équation pour se ramener à une identité⁽³⁹⁾. Il suit alors immédiatement de ce lemme que si le polynôme $\frac{dx}{\sqrt{x^m+1}}$ peut être transformé en un polynôme négativement semblable, alors la somme intégrale s'annule,

⁽³⁷⁾Par différentiation à partir de l'équation de la parabole $y = \frac{2}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}$, on obtient que $dy = x^{\frac{m}{2}}dx$, et donc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+x^m}.dx$, d'où suit la mesure de l'arc OA .

⁽³⁸⁾Pour obtenir l'expression de la tangente AV (resp. au), on applique le théorème de Pythagore au triangle d'hypoténuse AV (resp. au) dont les côtés sont parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées, et dont les longueurs respectives sont $OF = x$ et $AF + OV$ (resp. $Of = z$ et $af + Ou$).

⁽³⁹⁾La clef de toute la démonstration tient dans cette simple équation $\sqrt{1+x^m} - \frac{x^m}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^m}}$.

et les deux arcs ensemble mesurés à partir de l'origine égalent une expression rectiligne. Par soustraction, on démontre ainsi plus généralement que la différence entre deux arcs quelconques pris arbitrairement sur la parabole est rectifiable.

Fagnano obtient ensuite un ensemble de résultats analogues concernant les sommes d'intégrales en démontrant d'abord certaines propriétés algébriques dans le cas général de différentielles du type $x^{cm}.dx.(1+x^m)^{f-1}$, puis en précisant l'interprétation géométrique dans les cas particuliers où l'on donne une valeur déterminée aux paramètres, comme par exemple dans le cas où l'on considère $\frac{x^{cm}.dx}{\sqrt{1+x^m}}$. Mais la proposition fondamentale de l'ensemble du mémoire est le théorème des polynômes négativement semblables que Fagnano énonce dans le cas le plus général et démontre par une méthode purement calculatoire. La forme même du polynôme Y est de toute évidence imposée par des considérations combinatoires et Fagnano semble n'être ici guidé par aucune interprétation géométrique, alors même que l'exigence de conférer un sens géométrique aux transformations vient ensuite, dans les corollaires, au premier plan des préoccupations, lorsqu'il s'agit de spécifier la forme générale en prenant des valeurs particulières des paramètres⁽⁴⁰⁾.

Théorème. Soit le polynôme $Y = \frac{x^{n-1}.dx.(x^n+p)^{h-1}}{E^h}$, dans lequel

$$\begin{aligned} E = & l.x^{2n} + 2lp.x^n + lp^2 \\ & + lq.x^n + lpq \\ & + lr \end{aligned}$$

si on fait la substitution suivante $x^n = \frac{r-p.z^n-p^2}{z^n+p}$, alors le polynôme Y sera transformé en un autre négativement semblable. Les paramètres l, p, q, r sont arbitraires et peuvent tous s'annuler à l'exception de l .

La démonstration consiste à effectuer successivement deux substitutions dont les propriétés déterminent la forme du dénominateur E de manière à obtenir un polynôme négativement semblable à celui dont on était parti.

$$\begin{aligned} Y = \frac{x^{n-1}.dx.(x^n+p)^{h-1}}{E^h} &= \frac{s^{h-1}.ds}{n.(ls^2 + lqs + lr)^h} \\ x^n = s - p & \\ &= \frac{-z^{n-1}.dz.(z^n+p)^{h-1}}{E^h} \\ s = \frac{r}{z^n+p} & \end{aligned}$$

⁽⁴⁰⁾Nous restituons la disposition diagrammatique des termes qui composent le polynôme E telle qu'on la trouve dans le mémoire de Fagnano car elle permet de mieux apercevoir la nature combinatoire du théorème.

Dans la première étape, on pose en effet $x^n = s - p$ et on remarque qu'en faisant les substitutions dans le polynôme E , on obtient

$$\begin{aligned} E &= l.(s^2 - 2sp + p^2) + 2lp.(s - p) + lp^2 \\ &\quad + lq.(s - p) + lpq + lr \\ &= ls^2 + lqs + lr \end{aligned}$$

Puisque $x = (s - p)^{\frac{1}{n}}$, on a $dx = \frac{1}{n}(s - p)^{\frac{1}{n}-1}.ds$, et il suffit de faire les substitutions appropriées dans Y pour obtenir le polynôme transformé.

Dans la seconde étape, on pose $s = \frac{r}{z^n + p}$, d'où l'on déduit $ds = \frac{-r.nz^{n-1}}{(z^n + p)^2}.dz$, et on obtient le polynôme négativement semblable par substitution grâce à la propriété suivante

$$\begin{aligned} ls^2 + lqs + lr &= \frac{lr^2}{(z^n + p)^2} + \frac{lqr}{z^n + p} + lr \\ &= \frac{lr^2 + lqr(z^n + p) + lr(z^{2n} + 2pz^n + p^2)}{(z^n + p)^2} \\ &= \frac{lr(z^{2n}) + 2lpr.z^n + lrp^2}{\frac{lqr.z^n + lqpr}{lr^2}} \\ &\quad \frac{1}{(z^n + p)^2} \end{aligned}$$

Dans le mémoire de 1718, Fagnano obtient donc la division du quadrant de lemniscate en deux arcs égaux par application de ce théorème général sur les polynômes négativement semblables. En choisissant judicieusement les valeurs des paramètres⁽⁴¹⁾, on peut en effet donner au polynôme Y la forme suivante $\frac{dx}{\sqrt{\frac{2x}{a} - \frac{2x^3}{a^3}}}$ qui, comme nous l'avons vu plus haut, correspond à l'élément d'arc de la lemniscate et la substitution $x^n = \frac{r-p.z^n-p^2}{z^n+p}$ devient du même coup

$$x = \frac{a^2 - az}{z + a} \quad \text{ou encore} \quad \frac{x}{a} = \frac{1 - \frac{z}{a}}{1 + \frac{z}{a}}$$

de sorte qu'en changeant de variables et en prenant comme précédemment $\xi = \frac{x}{a}$ et $\nu = \frac{z}{a}$, on obtient la relation dite de Fagnano, à savoir $\xi + \nu + \xi\nu = 1$,

⁽⁴¹⁾On pose en particulier $n = 1$, $p = a$, $r = 2a^2$, $h = \frac{1}{2}$, $l = -\frac{2}{a^3}$, $3lp + lq = 0$, $3lp^2 + 2lqp + lr = \frac{2}{a}$ et $lp^3 + lqp^2 + lrp = 0$.

ou plus précisément le théorème qui énonce que si la première des équations ci-dessous est vérifiée, alors la seconde l'est aussi

$$\begin{aligned}\xi + \nu + \xi\nu &= 1 \\ \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - \xi^3}} &= \frac{-d\nu}{\sqrt{\nu - \nu^3}}\end{aligned}$$

Dans les notations introduites plus haut où l'on considèrerait les cordes $CQ = z$ et $CE = u$, on pose

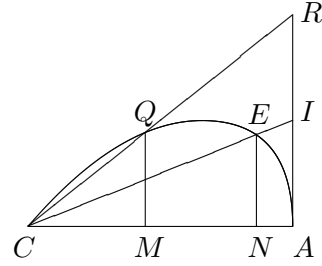
$$\xi = \frac{u^2}{a^2}, \quad \nu = \frac{z^2}{a^2}$$

et la relation $\xi + \nu + \xi\nu = 1$ donne immédiatement la substitution proposée dans le théorème III, à savoir

$$u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Dans le premier mémoire de 1718 consacré à la mesure de la lemniscate, Fagnano utilise donc la substitution trouvée dès 1715 mais sans reprendre le raisonnement calculatoire qui lui avait permis de la trouver. Toutefois, dans un appendice à ce mémoire de 1718 publié l'année suivante, il prend soin de donner une interprétation géométrique de la substitution elle-même sous la forme d'un nouveau théorème⁽⁴²⁾.

Prenons deux points Q et E dans le quadrant de lemniscate de demi-axe CA , et élevons la perpendiculaire en A à CA coupant les droites CQ et CE respectivement en R et I , la propriété en cause est alors la suivante : si la corde CE est égale à la tangente AR , alors d'une part l'arc inverse EA est égal à l'arc direct CQ , et d'autre part la corde CQ est égale à la tangente AI .



Fagnano en donne une démonstration géométrique. Nous avons vu plus haut que les coordonnées x et y du point Q peuvent être exprimées en fonction de la corde $z = CQ$, par substitution de $z^2 = x^2 + y^2$ dans l'équation en coordonnées cartésiennes $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$,

$$x = \frac{z}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + z^2}, \quad y = \frac{z}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - z^2},$$

Puisque les triangles CMQ et CAR sont semblables, on en tire que $AR = \frac{CA \times QM}{CM}$, par suite en remplaçant abscisses et ordonnées par leurs expressions

⁽⁴²⁾[Fag19, Théorème I, p. 349-350].

analytiques, on obtient

$$AR = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Mais si nous reprenons maintenant les intégrales exprimant les longueurs des arcs direct CQ et inverse AE

$$\text{arc } CQ = \int_0^z \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \quad \text{arc } AE = \int_0^\vartheta \frac{a d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

et si nous choisissons ce changement de variable $u = a \tan \vartheta$, alors nous obtenons⁽⁴³⁾

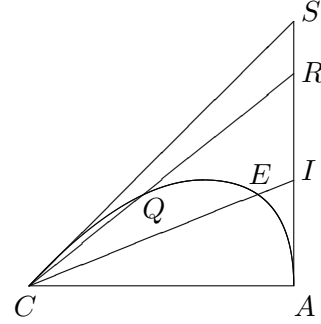
$$\text{arc } CQ = \int_0^z \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \quad \text{arc } AE = \int_0^u \frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

nous voyons ainsi qu'en prenant la corde CE égale à la tangente AR , c'est-à-dire en prenant $u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$, nous en déduisons l'égalisation des arcs CQ et EA . Remarquons en effet que la tangente devient égale au demi-axe, $AS = a$, lorsque la droite CS est tangente à la courbe en C et que l'arc intercepté sur le quadrant s'annule. Le même arc CQ est donc susceptible de deux expressions distinctes en regardant z comme une corde et u comme une tangente telle que l'on ait $u = a \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$

$$\text{arc } CQ = \int_0^z \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int_u^a \frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

Mais on peut tout aussi bien regarder la variable u dans l'intégrale de droite comme une corde et non plus comme une tangente, et on obtient alors

$$\text{arc } CQ = \int_0^z \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} = \int_a^u \frac{-a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}} = \text{arc } EA$$



La clef de l'égalisation des arcs direct et inverse, et par suite de la relation de Fagnano, tient donc essentiellement à cette possibilité d'interpréter les mêmes variables comme cordes et comme tangentes dans des différentielles de même forme.

⁽⁴³⁾ Puisqu'on pose $\tan \vartheta = \frac{u}{a}$, on a en effet $\cos^2 \vartheta = \frac{a^2}{a^2 + u^2}$ et $\cos 2\vartheta = \frac{a^2 - u^2}{a^2 + u^2}$, et donc $\frac{a d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = \frac{a^2 du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$

4. La théorie du doublement d'arc

Dans le second volet du mémoire de 1718, Fagnano propose un ensemble très cohérent de quatre substitutions qui permettent de rapporter de différentes manières la mesure de l'arc de lemniscate à une parabole cubique et suffisent à élaborer toute une théorie de la division de la lemniscate fondée sur le doublement d'arc. Il commence en effet par énoncer et démontrer les quatre théorèmes suivants :

$$\text{Théorème I} \quad \text{si } x = \frac{1}{z} \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - z^4}} \quad \text{alors} \quad \frac{\pm dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \frac{dx \sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$\text{Théorème II} \quad \text{si } x = \frac{\sqrt{1 \mp z}}{\sqrt{1 \pm z}} \quad \text{alors} \quad \frac{\mp dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \frac{dx \sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$\text{Théorème III} \quad \text{si } x = \frac{u \sqrt{2}}{\sqrt{1 - u^4}} \quad \text{alors} \quad \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$\text{Théorème IV} \quad \text{si } x = \frac{1}{t \sqrt{2}} \sqrt{1 - t^4} \quad \text{alors} \quad \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

La démonstration consiste en une vérification purement calculatoire dans chacun des cas, et ce n'est qu'ensuite que Fagnano donne un sens géométrique à ces quatre théorèmes, à partir d'une interprétation de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ au moyen de la parabole cubique $y = \frac{1}{3}x^3$. Certaines propriétés de la famille des paraboles $\frac{m+2}{2}y = x^{\frac{m+2}{2}}$ qui, comme nous l'avons vu plus haut, avaient fait l'objet du mémoire de 1715, sont maintenant mises à profit, en particulier la relation suivante :

$$\sqrt{1+x^m} - \frac{x^m}{\sqrt{1+x^m}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^m}}$$

Dans le cas où $m = 4$, on obtient alors en intégrant l'expression

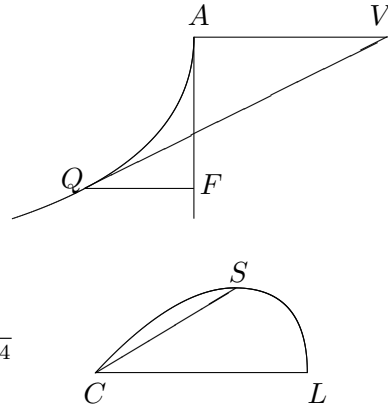
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int dx \cdot \sqrt{1+x^4} - \int \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

Mais une intégration par parties permet de ramener la dernière intégrale à une expression plus simple

$$\int \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{1+x^4} \right] - \frac{1}{2} \int dx \cdot \sqrt{1+x^4}$$

d'où il suit que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2} \int dx \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1+x^4}$$



qui s'interprète géométriquement⁽⁴⁴⁾, si l'on pose $AF = x$ et $QF = \frac{1}{3}x^3$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{3}{2} \text{arc } AQ - \frac{1}{2} QV$$

Si l'on fait à présent l'hypothèse que les deux quantités $AF = x$ et $CS = z$ sont liées par les relations envisagées plus haut, les équations différentielles des quatre théorèmes de départ reçoivent alors immédiatement un sens géométrique dès lors qu'on les intègre ; par exemple, si l'on choisit le signe + dans $\frac{\pm dz}{\sqrt{1-z^4}}$, le Théorème I rapporte la mesure de l'arc direct CS à l'arc de parabole AQ et à la corde QV

$$\text{arc } CS = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{arc } AQ - \frac{1}{\sqrt{2}} QV$$

et si l'on choisit le signe – dans $\frac{\pm dz}{\sqrt{1-z^4}}$, le Théorème II correspond à la mesure de l'arc inverse SL

$$\text{arc } SL = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{arc } AQ - \frac{1}{\sqrt{2}} QV$$

et ainsi des Théorèmes III et IV.

Ces résultats peuvent être utilisés selon deux perspectives essentiellement différentes : (1) soit pour rapporter la mesure de courbes plus composées à la mesure de courbes plus simples, (2) soit pour mesurer la lemniscate par elle-même et élaborer ainsi une théorie structurée de la division de cette même courbe. Fagnano esquisse en quelques mots l'idée directrice correspondant à la première direction de recherches.

Je me contenterai d'indiquer que puisque la mesure de la parabole cubique primaire dépend de plusieurs manières de l'extension de la lemniscate en vertu des quatre théorèmes antérieurs, et que la mesure de la lemniscate dépend *conjointement* de l'extension de l'hyperbole équilatère et d'un genre d'ellipse, conformément à ce qui a été découvert dans le premier mémoire (*i.e.* [Fag18a]), il s'ensuit que la mesure de la parabole cubique primaire dépend de plusieurs manières et *conjointement* de l'extension des deux sections coniques susdites.⁽⁴⁵⁾

⁽⁴⁴⁾ Cf. plus haut pour l'expression analytique de l'arc et de la tangente dans le cas des paraboles $\frac{m+2}{2}y = x^{\frac{m+2}{2}}$

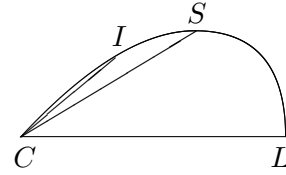
⁽⁴⁵⁾ [Fag18b, Scolie II, p. 360]. « *Io mi contenterò di accennare, che siccome la misura della parabola cubica primaria dipende in più maniere dell'estensione della lemniscata in virtù dei quattro antecedenti teoremi, e la misura della lemniscata dipende dall'estensione dell'iperbola equilatera, e d'una specie d'elisse unitamente, conforme ò scoperto nel I. schediasma, ne*

Mais c'est là un résultat annexe car le véritable enjeu du mémoire consiste à tirer pleinement profit de la flexibilité de l'instrument que constituent les quatre substitutions rapportant la lemniscate à la parabole cubique pour construire une mesure de la première indépendante de la seconde. L'idée essentielle est de concaténer les substitutions élémentaires pour égaliser l'intégrande lemniscatique à l'intégrande lemniscatique en éliminant l'intégrande intermédiaire.

Par concaténation des substitutions I et III d'une part, et I et IV d'autre part, on obtient ainsi les propriétés suivantes :

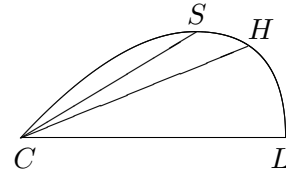
$$\text{Théorème V} \quad \text{si} \quad \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}} \quad \text{alors} \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$$

L'interprétation géométrique, donnée en corollaire, $\text{arc}CS = 2\text{arc}CI$, correspond au doublement ou à la division de l'arc en deux parties égales selon que l'on cherche à construire à la règle et au compas la grande corde $z = CS$, à partir de la donnée de la petite $u = CI$, ou que l'on considère au contraire que z est donnée et u requise :



$$\text{Théorème VI} \quad \text{si} \quad \frac{1}{t\sqrt{2}}\sqrt{1-t^4} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}} \quad \text{alors} \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{-2dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

On suppose à présent les deux cordes $CS = z$ et $CH = t$ réciproquement constructibles à la règle et au compas l'une à partir de l'autre conformément à la relation algébrique ci-dessus, alors l'équation différentielle associée correspond au doublement en un arc direct de l'arc inverse donné ou à la division en un arc inverse d'un arc direct donné : $\text{arc}CS = 2\text{arc}HL$



Le Théorème VI permet de résoudre le Problème I, à savoir la division à la règle et au compas du quadrant de lemniscate en trois parties égales⁽⁴⁶⁾. Il suffit d'imposer la condition supplémentaire que les points S et H coïncident en T , ce qui revient à exiger à la fois la constructibilité réciproque et l'égalisation des cordes $CS = z$ et $CH = t$

$$\frac{1}{t\sqrt{2}}\sqrt{1-t^4} = \frac{1}{z}\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}} \\ t = z$$

segue, che la misura della parabola cubica primaria dipende in più maniere dall'estensione delle due suddette sezioni coniche unitamente. »

⁽⁴⁶⁾Cf. [Fag18b, p. 362].

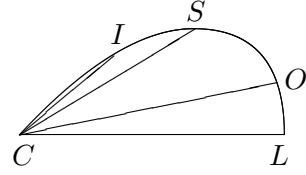
On en tire l'équation biquadratique $z^8 + 6z^4 - 3 = 0$ dont la racine réelle $z = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$ permet de construire le point T tel que $\text{arc } CT = 2\text{arc } TL$ qui divise le quadrant en trois parties égales⁽⁴⁷⁾.

Mais du même coup Fagnano donne aussi la solution du Problème II consistant à diviser le quadrant en cinq parties égales⁽⁴⁸⁾. On utilise alors conjointement le Théorème V et le Théorème VI. Considérons en effet les cordes $CI = u$, $CS = z$ et $CO = r$, et supposons qu'on ait les relations suivantes entre les arcs correspondants⁽⁴⁹⁾ :

$$\text{arc } CS = 2 \text{arc } CI \quad \text{et} \quad \text{arc } CI = 2 \text{arc } OL$$

Il suffit alors d'imposer la condition supplémentaire que les points S et O coïncident, ou encore que les cordes CS et CO soient égales pour obtenir un système d'équations qui renferme la solution au problème posé.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \\ u &= \frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4} \end{aligned}$$



Par élimination des variables auxiliaires, on en tire une équation en z résoluble par radicaux. L'équation trouvée est en effet réductible à une équation de degré huit, si l'on pose $h = z^4$, et Fagnano renvoie à la méthode de construction de l'équation de degré 8 développée par le marquis de l'Hôpital dans son traité des sections coniques.

⁽⁴⁷⁾ On construit le second point R en égalisant l'arc direct CR à l'arc inverse TL grâce à la propriété démontrée dans le premier mémoire de Fagnano. L'expression constructible à la règle et au compas $\sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$ correspond évidemment au cas de la lemniscate dont le demi-axe est égal à l'unité.

⁽⁴⁸⁾ Cf. [Fag18b, p.363].

⁽⁴⁹⁾ Fagnano montre qu'on peut réexprimer plus simplement les substitutions V et VI. Ainsi en élevant au carré, en développant et en réorganisant les termes des expressions, on démontre que

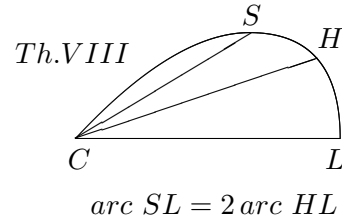
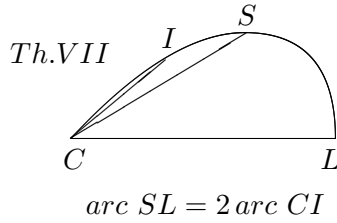
$$\begin{aligned} \text{Substitution V} \quad & \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{1}{z} \sqrt{1 - \sqrt{1-z^4}} \quad \longrightarrow \quad z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} \\ \text{Substitution VI} \quad & \frac{1}{r\sqrt{2}} \sqrt{1-r^4} = \frac{1}{u} \sqrt{1 - \sqrt{1-u^4}} \quad \longrightarrow \quad u = \frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4} \end{aligned}$$

Les deux derniers théorèmes s'obtiennent enfin en combinant les substitutions II et III d'une part, et II et IV d'autre part.

$$\text{Théorème VII} \quad \text{si} \quad \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}} \quad \text{alors} \quad \frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}$$

$$\text{Théorème VIII} \quad \text{si} \quad \frac{1}{t\sqrt{2}}\sqrt{1-t^4} = \frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}} \quad \text{alors} \quad \frac{-dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{-2dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

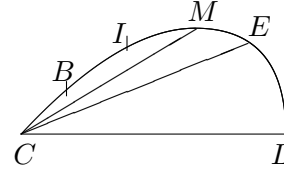
Comme précédemment, l'interprétation géométrique de ces théorèmes stipule que si les cordes sont liées par une certaine relation algébrique alors les arcs correspondants sont doubles l'un de l'autre.



Le théorème VII permet de résoudre le Problème III qui concerne l'égalité des arcs direct et intermédiaire. Si M divise le quadrant de lemniscate en deux parties égales, et si CB est un arc moindre que la moitié du quadrant, il s'agit de trouver un arc IM, mesuré par rapport à de ce milieu M, tel que $\text{arc } IM = \text{arc } CB$.

En vertu du Théorème VII, il suffit de prendre l'arc inverse EL double de l'arc direct CB, puis en vertu du Théorème V, de prendre la moitié CI de l'arc CE, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} \text{arc } CB + \text{arc } CI &= \frac{1}{2}(\text{arc } EL + \text{arc } CE) \\ &= \frac{1}{2}\text{arc } CL = \text{arc } CM \end{aligned}$$



d'où l'on tire $\text{arc } CB = \text{arc } IM$.

Dans le Problème IV, Fagnano se propose de partitionner les subdivisions déjà construites. Si le quadrant de lemniscate est divisé en un nombre donné de parties égales, il s'agit de subdiviser chaque arc en deux parties égales. L'idée de la méthode est très simple. Si, à la suite de Fagnano, nous nommons arcs directs « impairs » les arcs qui contiennent un nombre impair de parties égales, alors on peut, grâce au Théorème V, diviser en deux arcs égaux chaque arc impair, puis prendre les arcs inverses de ces moitiés d'arcs, et obtenir ainsi la subdivision demandée. Il en résulte ce corollaire que le quadrant de lemniscate peut être divisé algébriquement en 2×2^m , 2×3^m ou 2×5^m parties égales, pour

un entier m quelconque. Cette proposition remarquable qui récapitule toute la théorie de la division de la lemniscate est revendiquée par Fagnano comme une requalification profonde qui lui permet de s'approprier la courbe des Bernoulli : « *E questa è una nova, e singolare proprietà della mia curva* »⁽⁵⁰⁾.

5. La structure des substitutions de Fagnano et la multiplication complexe

Euler reconnut toute l'importance des résultats analysés plus haut à l'occasion de la recension des mémoires de Fagnano que l'Académie de Berlin lui avait confiée. Dans une série de mémoires échelonnés sur plusieurs années mais tous publiés en 1761, il approfondit cette méthode de comparaison des quantités transcendentes, à partir des travaux du mathématicien italien consacrés à la lemniscate sur lesquels il porte le jugement suivant :

Si l'on s'attache à l'utilité qu'elles présentent, les spéculations mathématiques semblent devoir être ramenées à deux grandes classes ; à la première classe se rapportent celles qui procurent un avantage remarquable à la fois à la vie commune et aux autres arts, et on en fixe d'ordinaire le prix d'autant plus haut que cet avantage est grand. Mais une autre classe cependant rassemble les spéculations qui, quoiqu'elles ne soient liées à aucun avantage remarquable, sont cependant de nature à fournir une occasion de promouvoir les fins de l'Analyse et d'aiguiser les forces de notre esprit. Puisqu'en effet nous sommes conduits à laisser de côté de très nombreuses recherches, dont on peut attendre une très grande utilité, en raison seulement d'un défaut d'analyse, il semble que nous ne devons pas estimer à un moindre prix ces recherches qui promettent des accroissements non négligeables de l'Analyse. En vue de cette fin, ces observations sont particulièrement précieuses qui ont été faites presque par hasard et découvertes a posteriori, dont on ne perçoit aucune raison a priori, ni aucune voie directe pour les atteindre. Mais la vérité étant déjà connue, il sera permis de rechercher plus facilement dans ces observations des méthodes qui conduisent directement à cette vérité, et il ne fait clairement aucun doute que la recherche de nouvelles méthodes ne contribue pas peu à la promotion des buts de l'Analyse.

J'ai trouvé dans l'ouvrage récemment publié du comte Fagnano quelques observations de ce genre qui sont faites sans méthode certaine et dont la raison semble assez cachée. [...]

⁽⁵⁰⁾ Cf. [Fag18b, p. 368]. C'est moi qui souligne le possessif.

Puisque la raison de ces propriétés semble ainsi grandement occulte, j'estime qu'il ne sera pas hors de propos que je les examine de manière plus diligente, et que je partage avec le public celles qu'en outre j'ai eu le bonheur de mettre au jour concernant ces courbes.⁽⁵¹⁾

Le mémoire de 1761 peut être divisé en deux grandes parties. Dans les deux premiers tiers, Euler expose de manière synthétique les méthodes de Fagnano à partir des substitutions correspondant au doublement de l'arc en signalant, là où la remarque s'impose, que la portée de ces méthodes permet d'obtenir sans coup férir des résultats qui prolongent ceux que Fagnano a explicitement formulés. Par exemple la division du quadrant de lemniscate est possible à la règle et au compas non seulement pour une division en $2^m \times 2$, $2^m \times 3$ et $2^m \times 5$ arcs égaux, mais plus généralement pour $2^m \times (1 + 2^n)$ arcs égaux, sans que cette dernière proposition requière des moyens de démonstration nouveaux. Dans le dernier tiers du mémoire en revanche, Euler cherche à obtenir une règle générale permettant d'exprimer la corde sous-tendant l'arc n -uple en fonction de la corde sous-tendant l'arc simple, pour une valeur entière quelconque de n . Il parvient ainsi à dégager la structure des substitutions de Fagnano pour en tirer une formule générale d'addition des arcs lemniscatiques⁽⁵²⁾.

⁽⁵¹⁾[Eul61b, p. 81-82]. « *Speculationes mathematicæ, si ad earum utilitatem respicimus, ad duas classes reduci debere videntur; ad priorem referendæ sunt eae, quæ cum ad vitam communem tum ad alias artes insigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine hujus commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quæ, etsi cum nullo insigni commodi sunt conjunctæ, tamen ita sunt comparatæ, ut ad fines Analyseos promovendos viresque ingenii nostri acuendas occasionem præbeant. Cum enim plurimas investigationes, unde maxima utilitas expectari posset, ob solum analyseos defectum deserere cogamur, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur, quæ haud contemnenda Analyseos incrementa pollicentur. Ad hunc autem scopum imprimis accommodatæ videntur ejusmodi observationes, quæcum quasi casu sint factæ et a posteriori detectæ, ratio ad easdem a priori ac per viam directam perveniendi minus vel neutiquam est perspecta. Sic enim cognita jam veritate facilius in eas methodos inquirere licebit, quæ ad eam directe sint perductæ, novis autem methodis investigandis Analyseos fines non mediocriter promoveri nullum plane est dubium. Hujusmodi autem observationes, quæ nulla certa methodo sunt factæ quarumque ratio non parum abscondita videtur, nonnullas deprehendi in opere Ill. Comitum Fagnani nuper in lucem edito; (...) cum igitur ratio harum proprietatum maxime occulta videatur, haud alienum fore arbitror, si eas diligentius examinavero, et quæ mihi insuper circa has curvas elicere contigit, cum publico communicavero. »*

⁽⁵²⁾Cf. [Eul61b, Corollaire 2, p. 103].

Il suppose que les cordes $CM = x$ et $CN = y$ interceptent des arcs arbitraires dans le quadrant de lemniscate, et montre que la corde $CP = z$ qui sous-tend l'arc égal à la somme des deux arcs CM et CN s'exprime algébriquement en fonction de x et de y de sorte que si la première des deux équations suivantes est vérifiée, la seconde l'est aussi :

$$z = \frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}$$

$$\text{arc } CP = \text{arc } CM + \text{arc } CN$$

Mais Euler remarque qu'on peut exprimer ce résultat en utilisant la relation de Fagnano, qu'il nomme la formule de la corde complémentaire. Dans le cas en effet où il y a égalité des arcs direct et inverse, la corde directe $CM = x$ et la corde complémentaire $CE = X$ sont liées par la relation

$$X = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

Par conséquent dans la notation d'Euler, la formule d'addition s'écrit sous une forme plus simple qui facilite l'appréhension des symétries

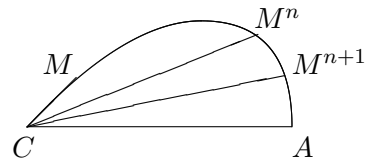
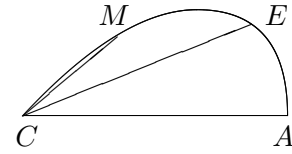
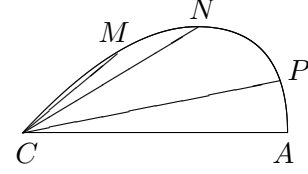
$$z = \frac{xY + yX}{1 - xyXY}$$

La démarche qui lui permet de dégager cette relation est essentiellement inductive comme en témoigne le fait que le théorème d'addition se présente d'abord sous la forme d'un théorème de l'arc multiple dont la nature inductive récapitule en quelque sorte le mouvement du raisonnement dans l'enchaînement de ses étapes.

Théorème 6. Si la corde de l'arc simple CM est $= z$, et la corde de l'arc n -uple $CM^n = u$, la corde de l'arc $(n+1)$ -uple sera

$$CM^{n+1} = \frac{zU + uZ}{1 - uzUZ}$$

où $Z = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1+z^2}}$ et $U = \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1+u^2}}$.



Comme il le suggère lui-même à demi-mots⁽⁵³⁾, Euler part en effet de la formule du doublement de l'arc de Fagnano et la réinterprète de façon à faire apparaître une symétrie

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} = \frac{z\sqrt{1-z^4} + z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$$

Le procédé consiste à trouver pour le dénominateur une expression qui permette de faire apparaître la formule de la corde complémentaire. On remarque en effet que

$$1+z^4 = 1+z^2-z^2+z^4 = 1+z^2-z^2(1-z^2) = (1+z^2) \left(1-z^2 \left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\right)$$

Ainsi la formule du doublement d'arc peut désormais s'écrire

$$u = \frac{z\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}} + z\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}}{1 - zz\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}} = \frac{zZ + zZ}{1 - zzZZ}$$

Euler dit être parti de l'itération des formules du doublement d'arc. Si on note z la corde de l'arc simple, u la corde de l'arc double, p , q , etc. celles des arcs quadruple, octuple, etc., on a

$$\begin{aligned} u &= \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4} \\ p &= \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4} = \frac{4z(1+z^4)(1-6z^4+z^8)\sqrt{1-z^4}}{(1+z^4)^4 + 16z^4(1+z^4)^2} \\ q &= \frac{2p\sqrt{1-p^4}}{1+p^4} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Partant de cette série de formules, il s'agissait d'abord de rechercher l'expression des cordes pour les autres arcs multiples en dehors des puissances de 2, or le premier cas qui se présente est l'arc triple. On peut raisonnablement supposer que le fait qu'Euler écrive la seule corde de l'arc quadruple en fonction de la corde de l'arc simple z dans la série qu'il prend soin de développer, témoigne de ce qu'il cherchait à réinterpréter cette formule en fonction de la corde de l'arc simple et d'une expression pour la corde de l'arc triple sur le modèle de la formule symétrique du doublement d'arc indiquée plus haut. En d'autres termes, selon cette interprétation, en regardant un arc quadruple comme somme d'un arc simple et d'un arc triple, la question se posait naturellement de chercher à

⁽⁵³⁾Cf. [Eul61b, Scholie 1, §39, p. 99]. Nous reconstituons la démarche la plus plausible conformément aux quelques indications qu'Euler donne dans ce passage.

isoler les termes z et Z dans la formule de p ci-dessus pour trouver l'expression de la corde de l'arc triple.

J'ai d'abord fait apparaître, à titre d'essai, que si la corde de l'arc simple était $= z$, la corde de l'arc triple serait $= \frac{z(3-6z^4-z^8)}{(1+6z^4-3z^8)}$. Et j'ai compris ensuite que ce qui était véritablement en cause pouvait être expédié en toute généralité de la manière suivante [*i.e. sous la forme inductive du Théorème 6*]⁽⁵⁴⁾.

Il est assez remarquable qu'Euler ne restitue rien dans son propre mémoire des raisonnements qui ont conduit Fagnano à trouver les substitutions pour l'arc inverse et l'arc double. Il ne prend en considération que les substitutions qui préservent la forme de la différentielle lemniscatique et ignore complètement les substitutions intermédiaires qui rapportent la lemniscate à la parabole cubique. L'enjeu est de faire apparaître les relations algébriques symétriques générales sous-jacentes dans les substitutions de Fagnano mais non de révéler la « raison cachée » qui en justifierait la forme. Aussi Euler ne manque-t-il pas de souligner le défaut d'intelligibilité qui leur serait inhérent dans les travaux de son prédécesseur :

De là pourrait certainement provenir une très grande lumière dans la théorie des quantités transcendentes si seulement la procédure dont Fagnano s'est servi pouvait fournir une méthode certaine pour aller plus avant dans ces investigations ; mais du fait qu'elle repose tout entière sur des substitutions faites à titre précaire et appliquées presque au hasard, l'Analyse n'en retire que très peu d'utilité.⁽⁵⁵⁾

Dans le cas de l'égalisation de l'arc direct et de l'arc inverse, la substitution correspondant à la relation de Fagnano est tirée, comme nous l'avons vu plus haut, de considérations de nature algébrique relative aux polynômes négativement semblables. Mais il n'y a rien de tel dans le cas de la théorie du doublement de l'arc et on ne sait pas exactement comment Fagnano en est venu à trouver ce système de quatre substitutions qui rapportent la mesure de la lemniscate à la parabole cubique.

⁽⁵⁴⁾ Cf. [Eul61b, Scholion, § 39, p. 99]. « *Primum quidem tentando elicui, si arcus simpli corda sit $= z$, tum arcus tripli cordam fore $= \frac{z(3-6z^4-z^8)}{(1+6z^4-3z^8)}$; verum postea rem sequenti modo generaliter expediri posse intellexi.* »

⁽⁵⁵⁾ [Eul61c, p. 110]. « *Hinc certe theoriæ quantitatum transcendentium insigne lumen accenderetur, si modo via, qua Fagnanus est usus, certam methodum suppeditaret in hujusmodi investigationibus ulterius progrediendi ; sed quia tota substitutionibus precario factis et quasi casu fortuito adhibitis nititur, parum inde utilitatis in Analysin redundat.* » Ce passage est mentionné dans [Wei84, p. 245].

Nous sommes maintenant en mesure d'apprécier la pertinence des remarques de C. L. Siegel du point de vue des deux questions que nous proposons de distinguer d'emblée, à savoir la question de la fabrique des substitutions de Fagnano et la question de la « raison cachée » qui en justifie la forme.

Concernant le premier point, C. L. Siegel avance la conjecture selon laquelle Fagnano a vraisemblablement cherché à rationaliser la différentielle lemniscatique au moyen d'une substitution algébrique, par analogie avec l'uniformisation de la racine carrée des polynômes du second degré. Si en effet, on récapitule en un système de formules les deux substitutions indépendantes censées faire disparaître les radicaux au dénominateur dans les différentielles

$$\begin{aligned} z &= \frac{2x}{1+x^2} & x &= \frac{2u}{1-u^2} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= \frac{2dx}{1+x^2} & \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{2du}{1-u^2} \end{aligned}$$

et si, en s'attachant désormais à la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ et en cherchant, comme précédemment à rationaliser l'intégrande, on applique ces mêmes substitutions dans lesquelles les variables z , x et u sont remplacées par leurs carrés, on obtient un nouveau système de formules qui, à défaut de faire disparaître la racine carrée au dénominateur, fait apparaître en revanche une même différentielle intermédiaire $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, ce qui permet du même coup d'enchaîner les deux substitutions

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2}x}{1+x^4} & x &= \frac{\sqrt{2}u}{1-u^4} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} &= \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{1+x^4}} & \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{1-u^4}} \end{aligned}$$

Toute la difficulté de ce type de reconstitution tient à l'exigence d'expliquer la démarche sans introduire d'éléments de méthode non immédiatement accessibles dans la pratique mathématique que l'on peut raisonnablement imputer aux auteurs que l'on étudie. Dans le cas qui nous occupe, il semble toutefois assez plausible que Fagnano ait compris tout le profit qu'il pouvait retirer en rapprochant deux ordres de considérations qui étaient à sa disposition : d'un côté les substitutions types permettant d'uniformiser les racines carrées des polynômes du second degré, et de l'autre les méthodes mises en oeuvre dès 1715 pour rectifier la différence de deux arcs irrectifiables de parabole. L'application à la différentielle lemniscatique des schémas d'uniformisation était en

quelque sorte dans l'ordre des choses dans un contexte où la question de savoir quelle méthode d'intégration pouvait convenir à ce cas de figure était débattue entre les mathématiciens⁽⁵⁶⁾. L'idée en elle-même très simple de rationalisation des intégrandes n'était d'ailleurs sans doute que la plus rudimentaire des préparations dans l'arsenal des moyens requis pour affronter cette question. Quoi qu'il en soit, les procédures de calcul alors en usage permettaient de fait d'établir un lien entre les différentielles $\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ et $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. Mais une chose est de faire un calcul particulier parmi un grand nombre d'autres calculs que suggèrent les questions auxquelles les mathématiciens d'une même époque sont confrontés, autre chose est de percevoir une forme dans ce calcul et d'y reconnaître une possibilité pertinente eu égard aux fins que l'on se propose. Or précisément, et c'est sans doute là l'élément le plus décisif en faveur de la reconstitution de C.L. Siegel, Fagnano avait déjà rencontré cette différentielle $\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, ou plus généralement les différentielles de la forme $\frac{dx}{\sqrt{1+x^m}}$, dans ses travaux antérieurs. Cette connaissance préalable de la différentielle et de ses propriétés a sans doute permis de rassembler les pièces éparses en une démarche unifiée. Il demeure cependant difficile d'établir sur la base des seuls textes une conclusion ferme concernant ce qui, dans la pratique du mathématicien, a trait à l'orientation de l'attention.

Notons toutefois qu'en outre Fagnano a pu être amené à envisager le système de transformations des intégrales lemniscatiques sous une forme analogue à celle qu'il adopte lorsqu'il est question de l'égalité de l'arc direct et de l'arc inverse, c'est-à-dire en exprimant l'arc de lemniscate au moyen de la différentielle $\frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\xi^3}}$.

⁽⁵⁶⁾Cf. [Wei84, p. 182]. « As Euler knew, Leibniz and Joh. Bernoulli had already asked whether the differential $\omega = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ can be integrated by means of logarithms or inverse trigonometric functions and had guessed that it could not. When Euler asked the same question in 1730 (Corr. I. 47,51) and then, in 1738, gave a proof for Fermat's theorem about the diophantine equation $X^4 - y^4 = Z^2$, it must surely have occurred to him that any substitution transforming ω into a rational differential might well supply rational solutions for $z^2 = 1-x^4$, and hence integral solutions for Fermat's equation. To his mind this gave perhaps some added flavor to integrals such as $\int \omega \dots$ »

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} & \zeta &= \frac{2\nu}{1-\nu^2} \\ \frac{d\xi}{\sqrt{\xi-\xi^3}} &= \frac{\sqrt{2}d\zeta}{\sqrt{\zeta+\zeta^3}} & \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta+\zeta^3}} &= \frac{\sqrt{2}d\nu}{\sqrt{\nu-\nu^3}}\end{aligned}$$

Dans ce cas, le changement des variables simples en leurs carrés est pour ainsi dire déjà pris en charge par le choix de la forme différentielle, et les substitutions sont donc exactement les mêmes que celles qui uniformisent la racine carrée des polynômes de degré 2. Pour autant qu'il s'agisse de rendre compte de la démarche effective de Fagnano, nous ne pouvons donc guère produire en définitive qu'un faisceau de considérations convergentes et certes pas un argument en forme à l'appui de l'hypothèse de C.L. Siegel.

S'agissant de la seconde question à présent, celle de la justification rationnelle des substitutions relatives au doublement d'arc, C. L. Siegel soutient que le résultat de Fagnano relève essentiellement de la théorie de la multiplication complexe, quoique de manière voilée puisque dans les substitutions envisagées ci-dessus l'intégrale intermédiaire n'est pas lemniscatique. Néanmoins la « raison cachée » du doublement d'arc est comme inhérente à la structure même du système de substitutions, laquelle porte pour ainsi dire en elle la multiplication complexe, pourvu qu'on puisse étendre les variables au domaine complexe. Si l'on veut transformer l'intégrale intermédiaire en intégrale lemniscatique dans le système suivant :

$$\begin{aligned}z &= \frac{\sqrt{2}x}{1+x^4} & x &= \frac{\sqrt{2}u}{1-u^4} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} &= \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{1+x^4}} & \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{1-u^4}}\end{aligned}$$

il suffit en effet d'y changer le signe de $1+x^4$ en $1-x^4$ dans le radical au dénominateur, et donc de poser

$$x = \epsilon \xi \quad \text{tel que} \quad x^4 = -\xi^4$$

d'où l'on tire

$$\epsilon = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

La division de la variable auxiliaire x par la racine huitième de l'unité fait donc apparaître la multiplication complexe, puisqu'en remplaçant x par $\epsilon\xi$, le système de substitutions de Fagnano se présente alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\sqrt{2}\epsilon)\xi}{1-\xi^4} & \xi &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\right)u}{1-u^4} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} &= \frac{(\sqrt{2}\epsilon)d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} & \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\right)du}{\sqrt{1-u^4}} \end{aligned}$$

ou encore, puisque $\sqrt{2}\epsilon = 1+i$ et $\frac{\sqrt{2}}{\epsilon} = 1-i$, sous la forme :

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)\xi}{1-\xi^4} & \xi &= \frac{(1-i)u}{1-u^4} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} &= \frac{(1+i)d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} & \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} &= \frac{(1-i)du}{\sqrt{1-u^4}} \end{aligned}$$

La « raison cachée » du phénomène ne se manifeste qu'après l'inversion des fonctions elliptiques et le passage au domaine complexe, car, comme le remarquait déjà Cournot, il faut, pour la saisir, passer de l'« ordre logique » à l'« ordre rationnel » :

Au commencement du siècle, le géomètre Legendre avait fait un gros *traité des fonctions elliptiques*, plein de calculs et de théorèmes d'une exactitude logiquement irréprochable, mais où il intervertissait perpétuellement l'*ordre rationnel* et masquait les analogies indiquées par la théorie déjà si avancée des *fonctions circulaires* : car il y attaquait *directement* les fonctions qu'il aurait fallu qualifier d'*inverses* et traiter comme telles. Vingt ans plus tard sont venus du Nord deux jeunes géomètres, Abel et Jacobi, qui ont retourné la lunette et remis toutes choses à leur place, ce qui équivalait à éclairer d'une lumière nouvelle cette partie de la haute géométrie.⁽⁵⁷⁾

Cette distinction de l'« ordre logique » et de l'« ordre rationnel » tient principalement à l'orientation de la réflexion, car dans un cas l'attention se porte principalement sur l'expression formelle de la pensée tandis que dans l'autre on s'attache au fond des choses et aux propriétés intrinsèques des objets qu'on se propose d'étudier :

⁽⁵⁷⁾[Cou75, Quatrième section, §1. « Du domaine de la raison pure », p. 166.].

Il ne faut pas confondre l'ordre rationnel avec l'ordre logique quoique l'un de ces mots ait la même racine en grec que l'autre en latin. L'ordre rationnel tient aux choses considérées en elles-mêmes ; l'ordre logique tient à la construction des propositions, aux formes et à l'ordre du langage qui est pour nous l'instrument de la pensée et le moyen de la manifester.⁽⁵⁸⁾

La théorie des fonctions elliptiques fournit l'un des exemples les plus frappants de ce renversement de perspective⁽⁵⁹⁾. L'inversion et l'extension au domaine complexe permettent de donner une signification nouvelle aux intégrales elliptiques.

	notations de Legendre	notations de Jacobi
	$F(c, \phi) = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}}$	$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}$
module	$c, \quad 0 < c < 1$	$k, \quad 0 < k < 1$
complément du module	$b = \sqrt{1 - c^2}$	$k' = \sqrt{1 - k^2}$
amplitude	ϕ	$am\,u$
<i>sinus</i>		
<i>amplitudinis</i>		$x = \sin\,am\,u$
<i>cosinus</i>		
<i>amplitudinis</i>		$\sqrt{1 - x^2} = \cos\,am\,u$
intégrales	$F^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}}$	$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}}$
complètes	$F^1(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 \phi}}$	$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k'^2 x^2}}$

Si l'on s'en tient aux intégrales de première espèce, la comparaison des notations de Legendre et de celles de Jacobi permet de mieux cerner le sens dans lequel s'opère cette évolution de la théorie. On passe des premières aux secondes par un simple changement de variables $x = \sin \phi$, mais la grande originalité des notations de Jacobi tient à ce qu'elles conservent toutefois quelque chose

⁽⁵⁸⁾[Cou61, p. 47].

⁽⁵⁹⁾Cf. [Jac29] et la série des mémoires d'Abel consacrés aux fonctions elliptiques, en particulier [Abe27].

des notations de Legendre en ménageant concurremment différentes articulations possibles dans les expressions. Legendre nomme amplitude la variable d'intégration qu'est l'angle ϕ , et Jacobi considère le sinus de cette quantité, ou encore, selon sa terminologie, le *sinus amplitudinis*, dont l'introduction correspond à l'inversion des intégrales elliptiques

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \quad \text{d'où par inversion} \quad x = \sin am u$$

Parallèlement aux travaux d'Abel, Jacobi réinterprète les intégrales elliptiques par passage au domaine complexe. Si on suppose que la variable x se déplace dans le plan complexe le long de l'axe réel en évitant toutefois les pôles par des arcs infinitésimaux, alors le demi-plan supérieur se replie en quelque sorte en un rectangle. Si $0 < x < 1$, les deux expressions sous radical au dénominateur dans l'intégrande sont des quantités positives, mais $1 - x^2$ change de signe lorsque x traverse la valeur 1, et de même $1 - k^2x^2$, lorsque x traverse la valeur $\frac{1}{k}$, ainsi les différentielles sont-elles modifiées de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} -\frac{1}{k} < x < -1 & -1 < x < 1 & 1 < x < \frac{1}{k} \\ \frac{dx}{\sqrt{-1}\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}} & \boxed{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}} & \frac{dx}{\sqrt{-1}\sqrt{x^2-1}\sqrt{1-k^2x^2}} \end{array}$$

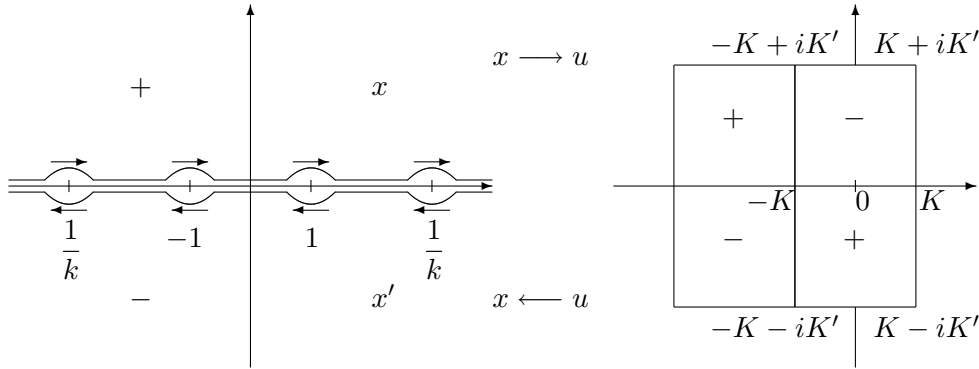
Par conséquent, lorsque la variable x parcourt l'axe réel dans le sens des x croissants en contournant les points de ramification ± 1 et $\pm \frac{1}{k}$, la valeur de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ est multipliée par $-\sqrt{-1}$, ce qui correspond à chaque fois à une rotation de $-\frac{\pi}{2}$. Symétriquement, si la variable parcourt l'axe réel dans le sens des x décroissants, ce sont des rotations de $+\frac{\pi}{2}$, et les valeurs correspondantes des différentielles s'obtiennent par le changement de variables $x' = -x$. La correspondance entre x et u qu'exprime l'intégrale elliptique correspond ainsi géométriquement à l'application des deux demi-plans supérieur et inférieur dans l'intérieur des parallélogrammes rectangles respectivement inférieur et supérieur. Les longueurs des côtés de ces rectangles correspondent aux intégrales complètes de la fonction elliptique en vertu des deux substitutions suivantes, dont la première

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-k'^2x^2}} \quad \text{où} \quad k' = \sqrt{1-k^2} \\ \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2-1}\sqrt{1-k^2x'^2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2x^2}} = K' \end{aligned}$$

permet de passer de K à $K \pm \sqrt{-1}K'$, et la seconde

$$x' = \frac{1}{kx} \quad \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}\sqrt{1-k^2x'^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k'^2x^2}} = K$$

de $K \pm \sqrt{-1}K'$ à K , justifiant ainsi le fait que les rectangles se referment.



Si nous recourons au langage des surfaces de Rieman, il apparaît que la racine carrée dédouble les feuillets et qu'en contournant les pôles par des arcs circulaires infinitésimaux tous situés dans le demi-plan supérieur ou tous dans le demi-plan inférieur, on reste sur un même feuillet ; par conséquent on peut paver le plan complexe en juxtaposant des rectangles semblables par des rotations complètes autour des pôles. On retrouve alors la périodicité de la fonction elliptique $\sin am u$ en prenant quatre exemplaires du rectangle élémentaire accolés les uns aux autres, en sorte que, comme le montre Jacobi⁽⁶⁰⁾, les périodes (ω_1, ω_2) de la fonction de la variable complexe s'expriment en fonction des intégrales complètes

$$\omega_1 = 4K \quad \text{et} \quad \omega_2 = 2iK'$$

On peut donc associer à chaque intégrale elliptique de module k un réseau parallélogrammatique $\mathbb{L} = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$, et aux substitutions qui transforment les intégrales d'un certain module en intégrales de module différent correspondent des transformations sur les couples de périodes associés. Dans le cas de la lemniscate, les périodes déterminent le réseau $\mathbb{Z}[i]$ et cette découverte de Gauss⁽⁶¹⁾

⁽⁶⁰⁾ Cf. [Jac28, p. 262-263].

⁽⁶¹⁾ Cf. [Gau14, entrée du 9 juillet 1814] sur le lien entre la théorie des résidus biquadratiques et la division de la lemniscate, [Gau01, § 335]. Sur Gauss, la lemniscate et la théorie des nombres, cf. [Hou07] et [Sch97].

et Abel⁽⁶²⁾ permettait d'élaborer une théorie arithmétique de la division de la lemniscate à partir des propriétés de l'anneau des entiers de Gauss⁽⁶³⁾. La multiplication complexe des fonctions elliptiques correspond ainsi à certaines propriétés remarquables des « réseaux de points » associés [*Punktgitter*] selon une terminologie introduite par Gauss⁽⁶⁴⁾, puis reprise ensuite par Felix Klein, dans le contexte de la théorie géométrique des formes quadratiques⁽⁶⁵⁾.

Dans le cas des transformations de Fagnano, Siegel montre ainsi qu'il y a multiplication complexe parce que les deux substitutions successives appliquent le réseau lemniscatique sur lui-même. En termes modernes, nous dirions qu'une courbe elliptique $X = \mathbb{C}/\mathbb{L}$ est dite admettre la multiplication complexe s'il y a une application $x \rightarrow \kappa x$ où $\kappa \notin \mathbb{Z}$ qui applique X sur X et telle que

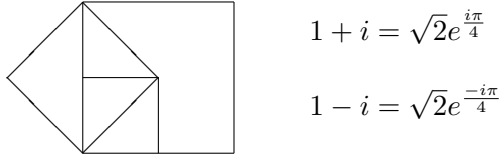
$$\kappa.\omega_2 = a.\omega_2 + b.\omega_1$$

$$\kappa.\omega_1 = c.\omega_2 + d.\omega_1$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, ou encore si le rapport de périodes $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est un point fixe de la substitution $[ab/cd]$. Dans le cas du doublement d'arc, les substitutions correspondent à des multiplications successives dans l'anneau des entiers de Gauss

$$(1+i)(1-i) = 2$$

qu'on peut interpréter comme l'enchaînement de deux rotations avec dilatation qui laissent chacune le réseau entier invariant.



C. L. Siegel repère ainsi dans les propriétés de la multiplication complexe pour le module $\sqrt{-1}$ les déterminants objectifs sous-jacents qui permettent de

⁽⁶²⁾Cf. [Abe27]. Sur Abel et la division de la lemniscate, cf. [Ros81] et [Hou07].

⁽⁶³⁾Sur le rapport entre arithmétique et théorie des fonctions elliptiques, en particulier sur l'approfondissement et le développement de la conception arithmétique de la lemniscate et les rapports avec les lois de réciprocité, notamment chez G. E. Eisenstein, cf. [Hou07] et [GS7a].

⁽⁶⁴⁾Cf. [Gau31b].

⁽⁶⁵⁾Cf. [Kle93, chap. VIII, « Ideal numbers »] ; [Kle96] ; [Kle26, chap. I].

comprendre pourquoi les substitutions de Fagnano sont celles qui mènent au doublement de l'arc.

La découverte de Fagnano fut par conséquent rendue possible par la circonstance que i est le module de la fonction lemniscatique et que $\mu\bar{\mu} = 2$ [i.e. $(1+i)(1-i) = 2$]. La formule de transformation pour la multiplication par μ , $\bar{\mu}$ est de forme plus simple que la formule qui s'obtient par composition, et c'est cela qui compte manifestement dans le succès de Fagnano.⁽⁶⁶⁾

Il ne s'agit nullement pour C. L. Siegel de prétendre que Fagnano aurait pu deviner ces raisons profondes, lesquelles n'apparaissent clairement que dans le cadre de la théorie des fonctions elliptiques du XIX^{ème} siècle. Aussi n'est-il sans doute pas nécessaire ici de conjurer le spectre de l'illusion rétrospective⁽⁶⁷⁾, quelque légitime que soit d'ordinaire ce souci. La question essentielle demeure toutefois entière : si nous tenons pour acquis que ni Fagnano ni même Euler ne pouvaient soupçonner la « raison cachée » du doublement de l'arc, pouvons-nous clarifier le type d'approche qu'ils privilégiaient, les fins qu'ils s'assignaient, et les idées directrices qui les guidaient, de manière à mieux apprécier le sens des théorèmes d'addition. Nous allons tenter dans les sections suivantes de montrer que l'analyse comparée du traitement de la lemniscate chez Fagnano et Euler d'un côté et chez Legendre de l'autre permet en effet de discerner dans l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques des lignes de développement distinctes et cohérentes orientées vers des fins différentes.

⁽⁶⁶⁾[Sie59, p. 251]. « Die Entdeckung von Fagnano wurde also durch en Umstand ermöglicht, daß i der Modul der lemniskatischen Funktion und $\mu\bar{\mu} = 2$. Die Transformationsformel für Multiplikation mit μ , $\bar{\mu}$ hat einfachere Gestalt als de Zusammensetzung entstehende Formel, und dieses war offenbach von Bedeutung für Fagnanos Erfolg. »

⁽⁶⁷⁾Cf. par exemple [Sch97, p. 4]. « [C. L. Siegel] *tried to divine how Fagnano obtained (5)* [i.e. le doublement d'arc]. *We mention his comments not because we find this kind of mathematical psychology across the centuries very convincing. But Siegel's observations prepare us for later stages of the history of our subject. (...) Siegel claims that the possibility to decompose (5) into simpler steps (7) was obviously relevant to Fagnano's success'. Since there is no mention of complex numbers or of formulas like (7) in Fagnano, this probably says more about Siegel's insights than about Fagnano's.* » Il est peut-être possible de tempérer la sévérité de ce jugement, si, comme nous le proposons, on prend soin de distinguer la question de la « fabrique » des substitutions de celle de leur « raison cachée ».

6. Périodicité, paramétrisations et modules

A.-M. Legendre voyait dans sa théorie des fonctions elliptiques un début de réalisation des vœux qu'Euler avait formés pour développer la théorie des transcendentes et plus particulièrement l'Analyse :

Il ne sera pas inutile pour l'histoire de la Science de faire remarquer ici que cette nouvelle branche d'analyse à laquelle l'Auteur a donné le nom de *Théorie des fonctions elliptiques*, est fondée en grande partie sur les bases établies dans le chapitre V concernant la forme la plus simple de ces fonctions et leur division en trois espèces ; d'où est résulté un système de nomenclature et de notation, propre à représenter ces fonctions dans les usages ordinaires de l'analyse, et à faciliter la recherche de leurs propriétés. Euler avait prévu qu'à l'aide d'une notation convenable, le calcul des arcs d'ellipse et autres transcendentes analogues, pourrait devenir d'un usage presque aussi général que celui des arcs de cercle et des logarithmes ; mais si on excepte Landen, qui, par la découverte de son théorème, aurait pu s'ouvrir des routes nouvelles, personne ne s'est mis en devoir de réaliser la prédiction d'Euler.⁽⁶⁸⁾

Legendre procède à une comparaison systématique de toutes les transcendentes contenues dans la formule $\int \frac{Pdx}{R}$, où P est une fonction rationnelle de x , et R la racine carrée d'un polynôme en x du quatrième degré. La classification en trois grandes espèces est le résultat de la réduction de ces expressions à la forme la plus simple dont elles sont susceptibles. L'intégrale de la forme $\int \frac{Pdx}{R}$ se décompose en effet en une partie algébrique qu'on peut isoler par intégrations partielles, « plus un certain nombre de transcendentes, qui sont toujours de la même forme et de la même nature »⁽⁶⁹⁾. Ainsi Legendre obtient-il une forme plus simple :

[...] la formule $\int \frac{Pdx}{R}$ sera transformée en une autre $\int \frac{Qd\phi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}}$, dans laquelle c sera plus petit que l'unité, et Q sera une fonction rationnelle paire de $\sin\phi$, laquelle contiendra $\sin\phi$ au même degré que P contient x .⁽⁷⁰⁾

⁽⁶⁸⁾[Leg25, Avertissement, p. vi et vii].

⁽⁶⁹⁾[Leg25, chap. I, §1. p. 4].

⁽⁷⁰⁾[Leg25, chap. III. §7. p. 11].

Mais Legendre précise encore la nature de cette fonction Q puisque toutes les formes qu'elle peut prendre sont comprises dans une même formule générale⁽⁷¹⁾

$$H = \frac{A + B \sin^2 \phi}{1 + n \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta}$$

où $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}$ et c est le module de l'intégrale elliptique, puis il explique que le choix des trois formes fondamentales pour les intégrales elliptiques, 1. $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, 2. $E = \int \Delta \cdot d\phi$, 3. $\Pi = \int \frac{d\phi}{(1 + n \sin^2 \phi) \Delta}$, est justifié par des considérations de type algorithmique :

Puisque toute intégrale désignée par $\int \frac{P dx}{R}$ se réduit à une partie algébrique, plus un certain nombre de termes qui peuvent chacun être assimilés à la fonction H , il s'ensuit qu'on pourrait n'admettre, pour les intégrales dont il s'agit, qu'une seule espèce de transcendentes, représentée par la fonction H , et dans laquelle les coefficients A , B , n seraient à volonté réels ou imaginaires. Mais pour bien pénétrer la nature de ces intégrales, et pouvoir établir entre elles les comparaisons et les réductions dont elles sont susceptibles, il est nécessaire de diviser la fonction H en plusieurs espèces distinctes, dont les propriétés deviendront plus sensibles, lorsqu'on les considérera chacune isolément.⁽⁷²⁾

Ainsi par exemple, la fonction F est choisie comme première espèce en tout premier lieu parce qu'elle est plus simple que les autres : une fonction F peut en particulier s'exprimer au moyen de deux arcs d'ellipse (i.e. par deux fonctions E) mais l'inverse n'a pas lieu, « ce qui indique que la fonction E est d'une nature plus composée que la fonction F »⁽⁷³⁾ ; mais aussi et surtout pour des raisons qui tiennent aux propriétés des fonctions F qui généralisent les propriétés des arcs de lemniscate :

La propriété la plus remarquable des fonctions F est qu'on peut déterminer, par des opérations purement algébriques, une fonction égale à la somme ou à la différence de deux autres fonctions ; d'où il suit qu'on peut déterminer algébriquement une fonction multiple, sous-multiple ou en général qui soit dans un rapport rationnel avec une fonction donnée ; propriété que les fonctions F partagent avec les arcs de cercle et les logarithmes, et qui a lieu quand même ces fonctions, considérées comme des intégrales ou des arcs de courbe,

⁽⁷¹⁾[Leg25, chap. IV. §11. p. 14].

⁽⁷²⁾[Leg25, chap. V. §13. p. 15].

⁽⁷³⁾[Leg25, chap. V. §14. p. 17].

n'auraient pas l'origine commune $\phi = 0$, et commenceraient à des points quelconques.⁽⁷⁴⁾

Si la théorie de Legendre se propose de « pénétrer la nature de ces intégrales », cette prétention est justifiée à deux titres au moins que nous allons successivement expliciter : (1.) d'une part parce que la notation adoptée révèle les propriétés de périodicité de ces intégrales et permet d'en tirer le meilleur parti dans l'élaboration d'un calcul de ces transcendentes ; et (2.) d'autre part parce que toute la théorie est guidée par l'exigence de mise en ordre méthodique de ces transcendentes. Ainsi Legendre présente-t-il les idées directrices de sa théorie dès la première page de son traité :

Si on pouvait ranger dans un ordre méthodique les diverses transcendentes qui n'ont été connues et employées jusqu'ici que sous le nom de quadratures ; si en étudiant leurs propriétés on trouvait les moyens de les réduire aux expressions les plus simples dont elles sont susceptibles dans l'état de généralité, et d'en calculer avec facilité les valeurs approchées lorsqu'elles deviennent entièrement déterminées ; alors les transcendentes dont il s'agit, désignées chacune par un caractère particulier et soumise à un algorithme convenable, pourraient être employées dans l'analyse à peu près comme le sont les arcs de cercle et les logarithmes ; les applications du calcul intégral ne seraient plus arrêtées, comme elles l'ont été jusqu'ici par cette espèce de barrière qu'on ne tente plus de franchir, lorsque le problème est ramené aux quadratures, et les solutions à peine commencées par cette réduction, recevraient tous les développements que comporte la nature de la question.

Ce qu'il serait impossible d'exécuter dans un plan aussi vaste que celui qui vient d'être tracé, on peut au moins le réaliser à l'égard des transcendentes qui se rapprochent le plus des fonctions circulaires et logarithmiques, telles que les arcs d'ellipse et d'hyperbole, et en général les transcendentes auxquelles nous avons donné le nom de *fonctions elliptiques*.⁽⁷⁵⁾

Périodicité — La normalisation de Legendre revient à trouver pour les intégrales elliptiques une expression analytique qui respecte la périodicité inhérente au fait géométrique sous-jacent. Tentons de le montrer dans le cas de la lemniscate. Nous avons vu que l'on peut mesurer la longueur d'arc de lemniscate soit à partir du point double, soit à partir de l'extrémité du demi-axe (cf.

⁽⁷⁴⁾ *Ibid.*

⁽⁷⁵⁾ [Leg25, Introduction, p. 1].

Fig.1.) :

$$\text{arc } CP' = \int_0^{\varrho} \frac{a d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}} \quad \text{arc } A'P' = \int_0^{\vartheta} \frac{a d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

où l'on note la corde $CP = \varrho$, l'angle $\angle ACP = \vartheta$ et les deux demi-axes $CA' = a$ et $CA = 1$. Puisque les lemniscates $CP'A'$ et CPA se correspondent par une homothétie de centre C et de rapport a , on ne considère que le cas simple de la lemniscate de demi-axe égal à l'unité. Au moyen du changement de variable $u = \tan \vartheta$, on se ramène aux intégrales suivantes

$$\text{arc } CP = \int_0^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}} \quad \text{arc } AP = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}$$

où les variables ϱ et u prennent toutes les deux leurs valeurs entre 0 et 1. Tandis que le point P parcourt le quadrant de lemniscate CPA du point double à l'extrémité du demi-axe, la corde CP varie entre 0 et CA d'une part, et la tangente AI varie entre $AE = 1$ et 0.

Si l'on s'en tient à cette interprétation géométrique des intégrales, il apparaît que l'intervalle dans lequel les variables d'intégration prennent leurs valeurs est l'intervalle borné $[-1, 1]$, qu'en conséquence la variation se présente comme une oscillation entre ces valeurs extrêmes, et que les bornes -1 et 1 sont des points de rebroussement. Lorsque la variable u croît de -1 à 1 , le point I parcourt le segment $E'E$ et le point P décrit la demi-lemniscate $CKAFC$ (cf. *Fig. 2*). En revanche, lorsque la variable ϱ croît de -1 à 1 , le point P parcourt la portion de lemniscate $BGCFA$. Mais pour une valeur déterminée de $u = AI$ comprise entre -1 et 1 , il y a deux points P et P' sur la lemniscate selon que cette valeur de u est traversée lorsque la variation se fait de -1 à 1 ou de 1 à -1 . De même deux points P et P'' correspondent à une même valeur de la variable $\varrho = CP$ telle que $-1 < \varrho < 1$. Le mouvement d'un point P parcourant la lemniscate est périodique mais le phénomène de périodicité n'est pas encore pleinement saisi puisque les variables u et ϱ ont encore un domaine de variation borné. Si l'on veut maintenant prolonger la variation continue au-delà d'une portion de la lemniscate pour l'étendre à la lemniscate entière et trouver une paramétrisation de la lemniscate qui puisse exprimer pleinement la périodicité du mouvement, alors on est conduit d'une manière ou d'une autre à rapporter la paramétrisation de la lemniscate à celle de l'hyperbole équilatère.

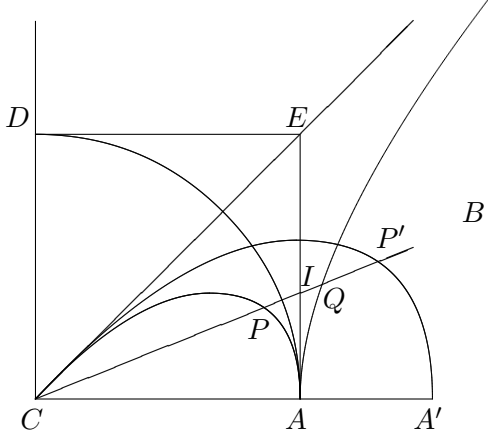


Fig.1

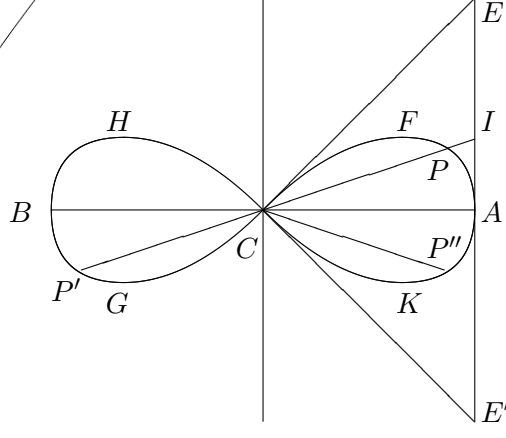


Fig.2

La lemniscate unité est en effet obtenue par inversion de l'hyperbole équilatère par rapport au cercle unité (cf. Fig. 1), c'est-à-dire que les points $P(x, y)$ et $Q(\xi, \eta)$ respectivement sur la lemniscate et l'hyperbole se correspondent si

$$CP \cdot CQ = 1$$

En prenant les abscisses sur la droite CA et les ordonnées sur la droite CD , on a :

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \vartheta & \text{si et seulement si} & & \xi &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \vartheta}{\varrho} \\ y &= \varrho \sin \vartheta, & & & \eta &= \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\sin \vartheta}{\varrho} \end{aligned}$$

L'équation en coordonnées cartésiennes de l'hyperbole, $\xi^2 - \eta^2 = 1$, et l'équation en coordonnées polaires de la lemniscate, $\cos 2\vartheta = \varrho^2$, s'obtiennent immédiatement l'une à partir de l'autre. Cette relation d'inversion, implicitement contenue dans les équations respectives des deux courbes fournit alors une première paramétrisation de la lemniscate (cf. Fig. 3), puisqu'en substituant $\varrho = \sqrt{\cos 2\vartheta}$ dans les équations ci-dessus, on a :

$$x = \sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta} \cdot \cos \vartheta \quad y = \sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta} \cdot \sin \vartheta,$$

Le calcul permet d'exprimer la valeur de l'élément d'arc $ds = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot d\vartheta$ comme une différentielle de ϑ , à savoir $ds = \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta}}$, et de mesurer ainsi la longueur d'arc :

$$\text{arc } AP = \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta}}$$

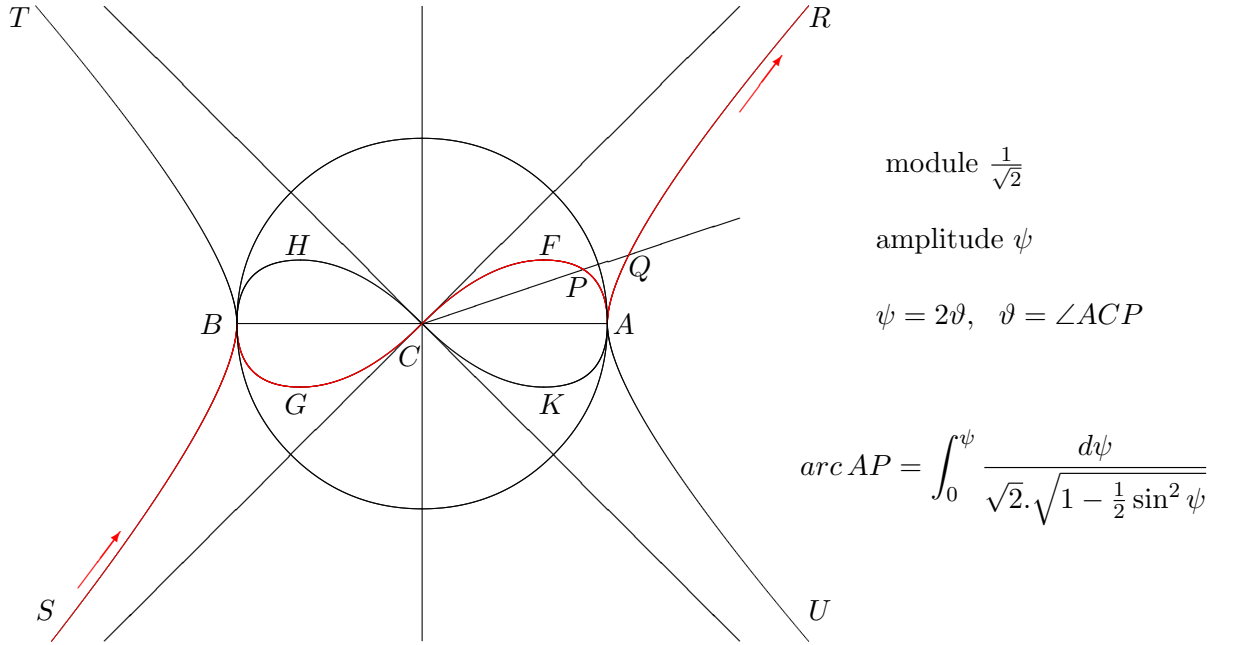


Fig.3 Première paramétrisation.

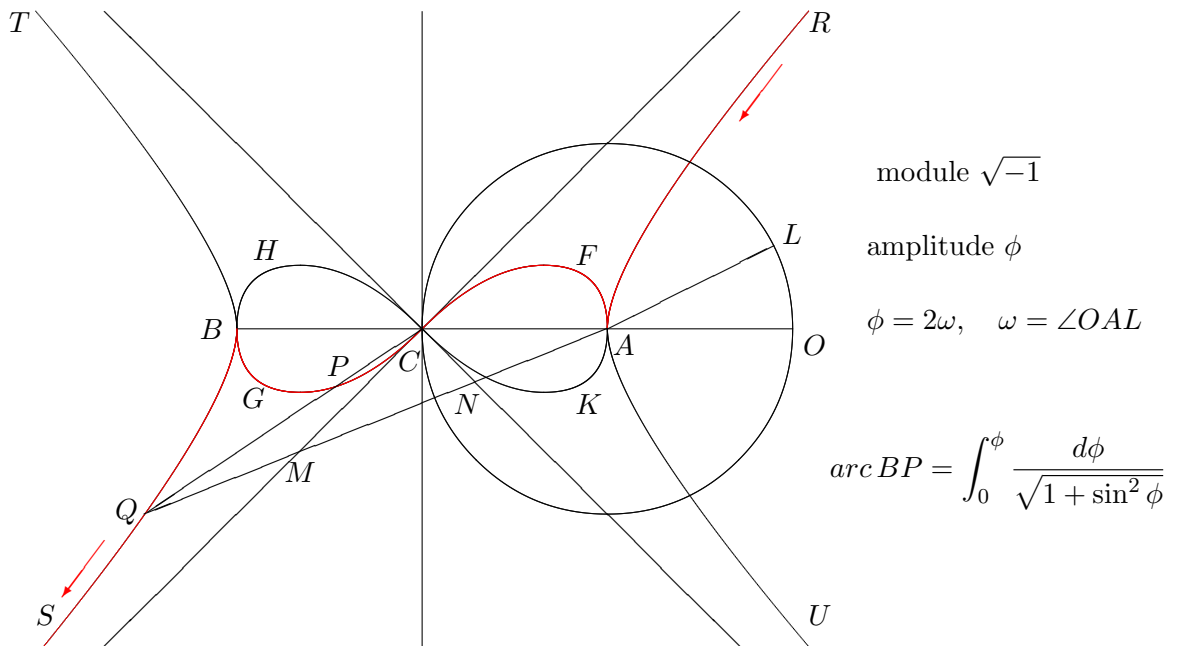
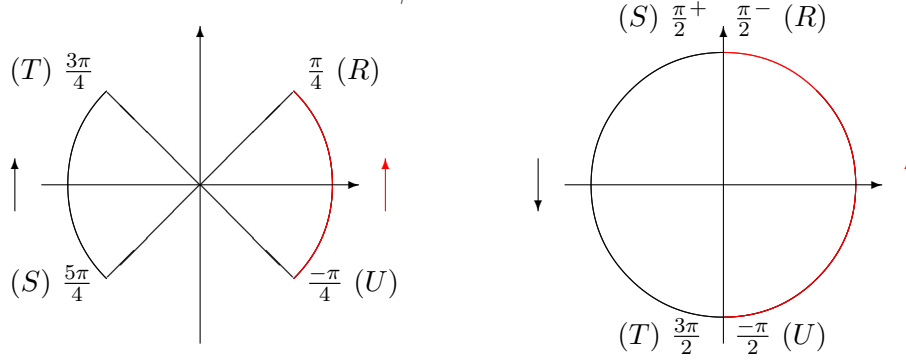


Fig.4. Seconde paramétrisation

Lorsque l'angle ϑ croît de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$, le point Q parcourt la première branche UAR de l'hyperbole en allant de U vers R et le point P parcourt la portion $CKAFC$ de la lemniscate. Mais d'autre part lorsque l'angle ϑ décroît de $\frac{5\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$, le point Q parcourt l'autre branche SBT de l'hyperbole de S à T et le point P la portion $CGBHC$ de la lemniscate. Le point Q passe à l'infini d'une branche de l'hyperbole à l'autre, en sorte que les deux branches AR et SB se rejoignent à l'infini en un point qui correspond par inversion au point double de la lemniscate. L'angle ϑ passe ainsi sans transition de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$ et de $\frac{3\pi}{4}$ à $-\frac{\pi}{4}$ et les deux domaines de variation s'aboutent l'un à l'autre avec une torsion. Ce défaut de continuité justifie alors un nouveau changement de variables

$$\sin^2 \psi = 2 \sin^2 \vartheta$$



dont le sens géométrique consiste à ressouder les deux parties de la lemniscate en unifiant les deux intervalles de variations $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ en un seul domaine de variation parcouru dans un seul sens. Le mérite de ce changement de variables est de permettre précisément que lorsque ϕ traverse la valeur $\frac{\pi}{2}$ (respectivement $\frac{3\pi}{2}$) dans le sens trigonométrique direct, ϑ passe de la valeur $\frac{\pi}{4}$ à $\pi + \frac{\pi}{4}$ (respectivement de la valeur $\frac{3\pi}{4}$ à $-\frac{\pi}{4}$), tandis que le signe change et par suite aussi le sens de la variation⁽⁷⁶⁾.

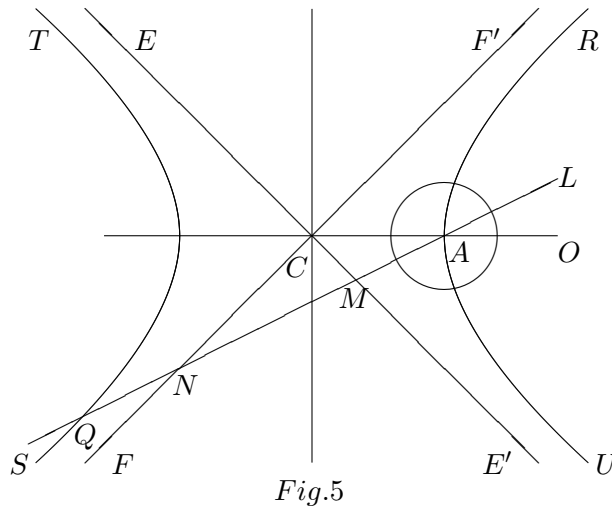
On a donc la transformation suivante :

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{d\psi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}}$$

et cette première paramétrisation de la lemniscate correspond à une mesure de la longueur d'arc au moyen d'une intégrale elliptique de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

⁽⁷⁶⁾Lorsque ψ traverse la valeur $\frac{\pi}{2}$, on passe de $\sin \psi = \sqrt{2} \sin \vartheta$ à $\sin \psi = -\sqrt{2} \sin \vartheta$, et inversement lorsque ψ traverse $\frac{3\pi}{2}$.

Mais il y a une autre paramétrisation possible qui se fonde sur une représentation différente de l'hyperbole et conduit à un module différent. L'hyperbole équilatère est en effet susceptible d'une construction cissoïdale dont le principe est le suivant. Prenons les axes des abscisses et des ordonnées perpendiculairement (cf. *Fig. 5*) et considérons les deux droites EE' et FF' d'équations $x = \mp y$. Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ et AL un rayon faisant un angle ω avec l'axe des abscisses.



Prolongée la droite AL coupe la première droite EE' en un point M et la seconde FF' en un point N . L'hyperbole équilatère est le lieu géométrique des points Q tels que l'on ait

$$AM = NQ$$

Le calcul permet d'exprimer les coordonnées⁽⁷⁷⁾ du point $Q(\xi, \eta)$ en fonction de l'angle ω :

$$\xi = \frac{1}{\sin^2 \omega - \cos^2 \omega} = \frac{1}{\cos 2\omega}, \quad \eta = \frac{2 \sin \omega \cos \omega}{\sin^2 \omega - \cos^2 \omega} = \frac{\sin 2\omega}{\cos 2\omega},$$

⁽⁷⁷⁾En premier lieu, on détermine les coordonnées des points M et N en fonction de l'angle ϕ en prenant l'intersection de la droite AL passant par le point $A(1,0)$ et de pente $\tan \omega$ avec les droites EE' et FF' d'équations $x = \mp y$. On obtient ainsi $M(\frac{\sin \omega}{\cos \omega + \sin \omega}, \frac{-\sin \omega}{\cos \omega + \sin \omega})$ et $N(\frac{\sin \omega}{\cos \omega - \sin \omega}, \frac{\sin \omega}{\cos \omega - \sin \omega})$ et la condition $AM = NQ$ permet de trouver l'expression des coordonnées (ξ, η) de Q .

Cependant, comme nous l'avons vu plus haut, les points $P(x, y)$ et $Q(\xi, \eta)$ se correspondent par l'inversion par rapport au cercle unité, par conséquent

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\cos 2\omega}{1 + \sin^2 2\omega} \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\sin 2\omega \cos 2\omega}{1 + \sin^2 2\omega}$$

Lorsque ω varie de 0 à π , le point P parcourt la lemniscate entière (cf. *Fig. 4*). En effet, pour des valeurs de ω comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, le point Q parcourt de B vers S la branche BS de l'hyperbole, tandis que le point P décrit le quadrant BGC de la lemniscate; pour des valeurs de ω comprises entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, le point Q parcourt de R vers A la branche RA de l'hyperbole et le point P décrit le second quadrant CFA de la lemniscate, etc.

Si l'on pose à présent $\phi = 2\omega$, on trouve l'expression de l'élément d'arc⁽⁷⁸⁾

$$ds = d\phi \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} = \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}}$$

qui correspond à une intégrale elliptique de module $\sqrt{-1}$.

Les deux modules $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{-1}$ correspondent donc à des paramétrisations périodiques différentes de la lemniscate et la périodicité représentée dans les formes normales de Legendre permet d'unifier la mesure des arcs directs et celle des arcs inverses. Si le point P est entre le point double C et l'extrémité A (cf. *Fig. 2*), alors l'arc direct et l'arc inverse se ramènent à une seule et même expression à une constante additive près, égale à la longueur d'un quadrant de lemniscate; on a ainsi par exemple

$$\text{arc } CP = \text{arc } BP - \text{arc } BC = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}}$$

Deux changements de variables permettent donc de passer des mesures partielles où la longueur d'arc est limitée au quadrant de lemniscate aux mesures

⁽⁷⁸⁾ Partant de $x = \frac{\cos \phi}{1 + \sin^2 \phi}$, $y = \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 + \sin^2 \phi}$, le calcul donne en effet $\frac{dx}{d\phi} = \frac{-\sin \phi (3 - \sin^2 \phi)}{(1 + \sin^2 \phi)^2}$ et $\frac{dy}{d\phi} = \frac{1 - 3 \sin^2 \phi}{(1 + \sin^2 \phi)^2}$, d'où l'on tire $\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 = \frac{(1 + \sin^2 \phi)^3}{(1 + \sin^2 \phi)^4}$.

périodiques⁽⁷⁹⁾ :

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \frac{\cos^2 \phi}{1 + \sin^2 \phi} & \sin^2 \psi &= 2 \sin^2 \vartheta \\ \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}} &= \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}} & \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} &= \frac{d\psi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} \end{aligned}$$

Si l'on passe maintenant aux notations de Jacobi, les différentielles associées aux deux modules se présentent alors ainsi :

$$\begin{aligned} x &= \sin \phi & x' &= \sin \psi \\ \frac{dx}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}} &= \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + x^2}} & \frac{dx'}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} &= \frac{dx'}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - x'^2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} x'^2}} \end{aligned}$$

et la relation entre les deux modules $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{-1}$ correspond au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - x'^2 \\ \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + x^2}} &= \frac{-dx'}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - x'^2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} x'^2}} \end{aligned}$$

Pour la mesure de la lemniscate, diverses expressions sont par conséquent équivalentes à transformation près⁽⁸⁰⁾. Cette malléabilité des intégrales elliptiques autorise donc des stratégies différentes selon les objectifs que l'on s'assigne. Chez Legendre, le choix d'une forme normale dépend, comme nous l'avons vu plus haut, de principes généraux qui dépendent d'enjeux théoriques plus généraux qui ne se limitent pas à l'étude d'une courbe particulière. Legendre réduit en effet les transcendentes elliptiques à des formes dans lesquelles le module est réel, compris entre 0 et 1. Il choisit donc naturellement le module $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans le cas de la lemniscate, mais le problème se présente pour ainsi dire à rebours pour lui, puisqu'il part des trois formes de fonctions elliptiques dégagées par l'entreprise de réduction pour tenter d'en donner ensuite une interprétation géométrique :

⁽⁷⁹⁾ L'interprétation géométrique des figures permet d'obtenir facilement ces changements de variables. Notons que ce sont des relations entre quantités au carré, en sorte qu'il y a une certaine latitude dans la manière d'établir une correspondance entre les différentielles et la figure. Par exemple, le choix entre $\varrho = \frac{-\cos \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}}$ et $\varrho = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi}}$ dépend de la manière dont on détermine l'angle ϕ , soit à partir de l'axe des abscisses, soit, en imposant une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ à tout le cercle trigonométrique, à partir de l'axe des ordonnées.

⁽⁸⁰⁾ Dans les notations de Jacobi, l'arc de lemniscate peut être représenté par une intégrale elliptique normalisée $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, $\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \frac{1}{2}x^2)}}$, ou non normalisée, comme chez Fagnano, $\frac{dx}{\sqrt{x - x^3}}$

La fonction E est représentée très simplement par un arc d'ellipse dont l'origine est fixé à l'extrémité du petit axe ; si l'on se proposait de représenter semblablement la fonction F par un arc de courbe algébrique, ce problème paraîtrait d'abord assez difficile ; cependant nous sommes parvenus à en trouver une solution assez générale et satisfaisante par les moyens que nous allons exposer.

Le cas qui se rencontre le plus souvent et qui mérite une attention particulière, est celui où l'on a $c = b = \sqrt{\frac{1}{2}}$. (...) Dans ce cas, la fonction $F(c, \phi)$ peut être représentée généralement par un arc de la courbe algébrique nommée *lemniscate*. (...)

De là on voit que les arcs de lemniscate jouissent de toutes les propriétés des fonctions elliptiques de la première espèce ; c'est-à-dire qu'ils peuvent être ajoutés, retranchés, multipliés, divisés algébriquement comme les arcs de cercle.⁽⁸¹⁾

La perspective de Legendre est donc différente de celle de Fagnano et d'Euler, dans la mesure où les intégrales elliptiques se substituent pour ainsi dire aux courbes comme objets d'étude, en sorte que ce sont les premières qui sont désormais les entités à part entière dont les secondes fournissent seulement une représentation par ajustement des paramètres.

Damier analytique — L'une des idées essentielles de Legendre est de chercher à « ranger dans un ordre méthodique les diverses transcendentes » en construisant un système de transformations réglées qui permette de passer des unes aux autres et d'élaborer un algorithme sur la base de cette procédure de réduction. Le point de départ de sa théorie a consisté, comme il l'explique lui-même, à apercevoir tout le parti qu'il pouvait tirer à cette fin de la transformation de Landen.

Nous allons faire voir qu'on peut, par une loi très simple, former une infinité de fonctions elliptiques de première espèce, qui diffèrent les unes des autres tant par le module que par l'amplitude, mais qui ont la propriété fort remarquable d'être entre elles dans des rapports constants.⁽⁸²⁾

Legendre considère les deux fonctions elliptiques de modules respectifs c et c'

$$F(c, \phi) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}} \quad \text{et} \quad F(c', \phi') = \int \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2 \phi'}}$$

et montre que si modules et amplitudes sont liés par certaines relations, alors les intégrales elliptiques se transforment les unes en les autres, ou encore si les

⁽⁸¹⁾[Leg25, chap. VII, §. 29. p. 35].

⁽⁸²⁾[Leg25, chap. XVII, §. 61. p. 79].

deux premières conditions sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi :

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad \sin(2\phi' - \phi) = c \sin \phi$$

$$F(c', \phi') = \frac{1+c}{2} F(c, \phi)$$

La propriété essentielle que Legendre remarque dans la transformation de Landen est qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter une constante pour égaliser les intégrales et que le rapport est donc constant quelle que soit la valeur variable qu'elles prennent conjointement.

Nous n'ajoutons point de constante, parce que les amplitudes s'évanouissent en même temps. On voit donc par ce résultat que les fonctions $F(c', \phi')$ et $F(c, \phi)$ seront entre elles dans un rapport constant, quelles que soient les amplitudes ϕ et ϕ' pourvu qu'elles soient liées entre elles par l'équation $\sin(2\phi' - \phi) = c \sin \phi$.⁽⁸³⁾

Legendre montre alors qu'on peut construire une échelle de modules par itération de transformations de ce type :

Concevons maintenant qu'à partir du terme donné c , on forme une suite infinie de modules $c, c', c'', c''', \text{etc.}$ d'après la loi

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}, \quad c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''}, \quad \text{etc.}$$

Cette suite de modules qui est continuellement croissante, aura pour limite l'unité, et atteindra sensiblement cette limite au bout d'un assez petit nombre de termes. (...)

Soit ensuite $\phi, \phi', \phi'', \phi''', \text{etc.}$ la série des amplitudes qui se déduisent chacune de la précédente par les formules

$$\begin{aligned} \sin(2\phi' - \phi) &= c \sin \phi, \\ \sin(2\phi'' - \phi') &= c' \sin \phi', \\ \sin(2\phi''' - \phi'') &= c'' \sin \phi'', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

on formera de cette manière une suite infinie de fonctions de première espèce $F(c, \phi), F(c', \phi'), F(c'', \phi''), F(c''', \phi'''), \text{etc.}$ entre lesquelles on

⁽⁸³⁾ *Ibid.*

aura les équations

$$\begin{aligned} F(c', \phi') &= \frac{1+c}{2} F(c, \phi), \\ F(c'', \phi'') &= \frac{1+c'}{2} F(c', \phi') = \frac{1+c}{2} \frac{1+c'}{2} F(c, \phi), \\ F(c''', \phi''') &= \frac{1+c''}{2} F(c'', \phi'') = \frac{1+c}{2} \frac{1+c'}{2} \frac{1+c''}{2} F(c, \phi), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

d'où il suit que deux quelconques de ces fonctions sont toujours entre elles dans un rapport constant pour toutes les valeurs des amplitudes correspondantes.⁽⁸⁴⁾

La série infinie des modules c , comme celle des compléments de modules $b = 1 - c$, peut être prolongée dans un sens comme dans l'autre et tend d'un côté vers la valeur 1 de l'autre vers la valeur 0. La raison du choix par Legendre d'une normalisation des intégrales elliptiques pour laquelle ne sont pris en compte que des modules réel compris 0 et 1 apparaît donc clairement liée à la construction de telles échelles de modules. Entre l'édition de 1811 des *Exercices de calcul intégral* et l'édition de 1825 du *Traité des Fonctions Elliptiques*, Legendre découvre une autre transformation qui permet d'élaborer une seconde échelle de modules⁽⁸⁵⁾ distincte de la première et qui la complète de manière à former un système ouvrant une latitude au calcul selon deux dimensions. C. G. Jacobi devait par la suite généraliser cette conception et développer de nouveaux principes qui permettent d'associer une échelle de modules à chaque nombre premier⁽⁸⁶⁾. Quoique fragmentaire, l'approche de Legendre présente toutefois une cohérence propre qui le distingue de ses prédécesseurs notamment dans le traitement de la lemniscate. Ainsi écrit-il à propos de la seconde échelle de modules qui figure dans la seconde édition de 1825 de son traité :

(...) cette seconde échelle combinée avec la première donne lieu à la formation d'une sorte de *damier analytique*, dont les cases correspondent aux transformations infiniment multipliées que peut subir la plus simple des fonctions elliptiques, sans cesser d'être semblable à elle-même.⁽⁸⁷⁾

⁽⁸⁴⁾ [Leg25, chap. XVII, §. 62. p. 80].

⁽⁸⁵⁾ [Leg25, chap. XXXI].

⁽⁸⁶⁾ Dans cette perspective nouvelle, les deux échelles de modules de Legendre sont attachées aux nombres 2 et 3, mais Jacobi montre comment obtenir pour chaque nombre premier une équation modulaire et une échelle de modules correspondante.

⁽⁸⁷⁾ [Leg25, Avertissement, p. v-vi]. C'est moi qui souligne.

Du fait des propriétés algébriques de la lemniscate, l'intégrale elliptique de module $\sqrt{\frac{1}{2}}$ peut être transformée d'une infinité de manières en intégrales de modules différents par itération des deux transformations fondamentales, pour ainsi dire de case en case dans le « damier analytique », et cependant ces intégrales peuvent toujours être ramenées algébriquement à des intégrales de module $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Legendre réinterprète par conséquent les résultats de Fagnano dans le cadre de sa propre théorie, comme l'atteste la manière dont il en rend compte lorsqu'il fait lui-même l'histoire des découvertes qui ont précédé la systématisation qu'il propose :

Maclaurin et d'Alembert sont les premiers qui se soient occupés des intégrales qui peuvent être exprimées par des arcs d'ellipse ou par des arcs d'hyperbole ; ils trouvèrent un grand nombre de formules susceptibles de cette réduction, mais les différents résultats n'étaient point liés entre eux et ne pouvaient former aucune théorie.

Un Géomètre italien d'une grande sagacité, ouvrit la route à des spéculations plus profondes. (...) Il démontra (...) que la courbe nommée *lemniscate* jouit de cette singulière propriété, que ses arcs peuvent être multipliés ou divisés algébriquement, comme les arcs de cercle, quoique chacun d'eux soit une transcendante d'un ordre supérieur ; c'est le premier exemple où l'on ait montré l'usage de la plus simple des fonctions elliptiques, qui est en quelque sorte la régulatrice de toutes les autres et qui peut se transformer d'une infinité de manières sans cesser d'être semblable à elle-même.⁽⁸⁸⁾

Cette caractérisation de la lemniscate comme « régulatrice de toutes les autres fonctions elliptiques » révèle un changement dans le mode de questionnement de Fagnano et Euler à Legendre. On peut exprimer les arcs d'une courbe donnée soit par des arcs de certaines autres courbes soit par des arcs de cette même courbe. Cette distinction qui, comme nous l'avons vu plus haut, jouait un rôle important dans les mathématiques des XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècle, semble désormais passer au second plan. La transposition des problèmes de mesure des courbes dans la théorie des transformations entre intégrales elliptiques de Legendre conduit à occulter la question de la nature géométrique des courbes sous-jacentes, hormis précisément dans le cas de la lemniscate qui sert alors en quelque sorte à étalonner le « damier analytique ».

⁽⁸⁸⁾[Leg25, Introduction, p. 1-2].

7. Transformation et multiplication complexe

Dans la Remarque Générale qui suit l'exposition de la première échelle de modules, Legendre fait réflexion sur les différents chemins qui auraient pu mener ses prédécesseurs à cette découverte. Le seul mérite qu'il revendique pour lui-même est d'avoir su tirer le système entier de comparaison des modules de la transformation de Landen.

Mais beaucoup d'autres substitutions peuvent conduire à de semblables résultats, et quand on considère combien de transformations analytiques ont été employées par Maclaurin et d'Alembert, dans leurs recherches sur les intégrales qui peuvent être exprimées par des arcs de sections coniques, on a lieu de s'étonner que la transformation qui met en évidence les propriétés nombreuses de l'échelle des modules, leur ait entièrement échappé et que cette découverte ait été réservée à Landen qui d'ailleurs n'en a tiré qu'un médiocre parti et qui n'a pas même vu qu'elle fournissait une méthode très simple pour calculer par approximation les arcs de section conique.

On s'étonnera moins que la même découverte ait échappé à Euler, si on observe que la belle intégrale due à ce grand Géomètre, l'a conduit à comparer entre elles les diverses valeurs d'une même transcendante, comme on compare les arcs d'une même courbe, ce qu'il a fait avec une élégance et une généralité qui ne laissent rien à désirer. Mais on ne voit dans aucun de ses Mémoires, qu'il ait fait varier les constantes ou les paramètres de ses fonctions, et qu'il ait ainsi passé d'une courbe à une autre, comme on le fait dans les comparaisons qui dépendent de l'échelle des modules.⁽⁸⁹⁾

Notons que Legendre lui-même marque les différences qui le séparent d'Euler, tant dans l'approche que relativement aux buts recherchés. C'est parce qu'il s'inscrivait dans cette tradition de la mesure des courbes où l'on cherche à comparer entre eux les arcs d'une même courbe que, selon Legendre, Euler ne se serait pas avisé de faire varier les paramètres des fonctions. Plus fondamentalement, la différence entre les deux traitements des intégrales elliptiques tient peut-être à ce que la nouvelle théorie des échelles de modules consacre le primat de la fonction sur la courbe. On ne se soucie plus de savoir quelles sont les courbes sous-jacentes dans le passage d'une case à l'autre du damier de Legendre, alors que l'exigence d'Euler dans les mémoires consacrés à la lemniscate est, comme il le dit lui-même, de « promouvoir les fins de l'Analyse et d'aiguïser les forces de notre esprit », ou encore de comprendre les raisons profondes des propriétés des courbes géométriques. Cette orientation de pensée le

⁽⁸⁹⁾[Leg25, chapitre XVIII, § 67, p. 88].

conduit à intégrer algébriquement l'équation différentielle⁽⁹⁰⁾ $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$. Ce problème constitue un cas particulier du problème général de la transformation des fonctions elliptiques et le traitement qu'en propose Euler préfigure à bien des égards la conception algébrique développée par Abel⁽⁹¹⁾ et Jacobi⁽⁹²⁾, chacun indépendamment l'un de l'autre, dans le premier tiers du XIXème siècle. Ainsi par exemple, la position algébrique du problème est-elle explicite dans la formulation qu'en donne Abel :

Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c_1^2y^2}} = a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}$$

par une *équation algébrique* entre les variables x et y , en supposant les modules c et c_1 moindres que l'unité et le coefficient a réel ou imaginaire.⁽⁹³⁾

La multiplication complexe est alors un cas particulier remarquable de la transformation si l'on suppose que les deux modules, de l'intégrale de départ comme de l'intégrale transformée, sont égaux.

Pour mieux apprécier cette différence d'approche entre Euler et Legendre, il peut être utile d'envisager dans son entier la procédure de normalisation de Legendre en la réinterprétant dans le cadre de la théorie de la variable complexe. Considérons en effet le groupe des automorphismes de la droite projective complexe \mathbb{P}^1

$$\Gamma(\mathbb{P}^1) = \left\{ w = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

On sait qu'on peut appliquer trois points sur trois autres points arbitrairement choisis sur la sphère de Riemann, en composant des transformations du type suivant⁽⁹⁴⁾ :

$$\phi : (a, b, c) \longrightarrow (\infty, 1, 0) \quad \text{avec} \quad \phi(z) = \frac{b-a}{c-b} \cdot \frac{c-z}{z-a}$$

⁽⁹⁰⁾ Cf. [Eul61a].

⁽⁹¹⁾ Cf. [Abe27, Abe28b, Abe28a].

⁽⁹²⁾ Cf. [Jac29].

⁽⁹³⁾ [?, p. 429-430].

⁽⁹⁴⁾ L'application qui envoie a, b, c respectivement sur a', b', c' , arbitrairement choisis sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, s'obtient en prenant la composée $\psi^{-1} \circ \phi$ de $\phi : (a, b, c) \longrightarrow (\infty, 1, 0)$ et de $\psi : (a', b', c') \longrightarrow (\infty, 1, 0)$.

Un automorphisme de $\Gamma(\mathbb{P}^1)$ est complètement déterminé par la manière dont il agit sur trois points arbitraires. Mais l'application au problème de la transformation des intégrales elliptiques requiert la mise en correspondance de deux séries de quatre points sur la sphère de Riemann. Le théorème fondamental de la géométrie projective énonce que quatre points distincts peuvent être envoyés sur quatre autres points si et seulement si les deux séries de points ont même rapport anharmonique, i.e. pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \cdot \frac{\beta - \delta}{\beta - \gamma}$$

Cette condition impose donc une contrainte à la procédure de normalisation, laquelle, dans le cas des intégrales elliptiques de première espèce, s'opère en deux temps :

1. Passage de trois racines à quatre racines.

On peut en effet toujours se ramener par une transformation adéquate à une intégrale elliptique dont le polynôme compte quatre racines distinctes. Partant de l'intégrale $\frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}$ où

$$Q(x) = (x - e_0)(x - e_1)(x - e_2)$$

et $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{C}$, on pose $x = t^2 + e_0$, et on obtient

$$\frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{(x - e_0)(x - e_1)(x - e_2)}} = \frac{2tdt}{\sqrt{t^2(t^2 + e_0 - e_1)(t^2 + e_0 - e_2)}}$$

où $P(t)$ compte quatre racines distinctes, puisque par hypothèse $e_0 \neq e_1$ et $e_0 \neq e_2$.

2. Réduction de l'intégrande $\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$ à la forme normale $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

Partant de $P(t) = (t - \epsilon_1)(t - \epsilon_2)(t - \epsilon_3)(t - \epsilon_4)$ et $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \in \mathbb{C}$, on construit une application $g : t \rightarrow \frac{at+b}{ct+d}$ qui envoie les quatre racines de $P(t)$ sur $1, -1, \frac{1}{k}, \frac{-1}{k}$. L'égalité des rapports anharmoniques impose alors une condition sur le module k :

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_4} \cdot \frac{\epsilon_2 - \epsilon_4}{\epsilon_2 - \epsilon_3} = \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2$$

et en prenant $x = gt = \frac{at+b}{ct+d}$, on obtient la transformation suivante⁽⁹⁵⁾ :

$$\begin{aligned} t &= g^{-1}x \\ \frac{dt}{\sqrt{(t-\epsilon_1)(t-\epsilon_2)(t-\epsilon_3)(t-\epsilon_4)}} &= \frac{M.dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \end{aligned}$$

Cette démarche permet sans doute le façonnement plastique des intégrales elliptiques, leur réduction à des types et leur classification, mais ne ménage encore aucun contrôle sur la correspondance entre les différents niveaux de corrélation que recouvrent les transformations de ce type. Selon la conception algébrique développée par Abel et Kronecker, il s'agit en revanche de saisir plus profondément comment les substitutions permettant de transformer les intégrales elliptiques en passant d'un module à un autre sont en réalité gouvernées par des transformations à coefficients entiers opérant sur les périodes des fonctions elliptiques associées à ces intégrales. Car il est non seulement possible d'identifier les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\kappa^2x^2}} = M \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-\lambda^2y^2}}$$

puisse être résolue algébriquement, c'est-à-dire pour qu'il y ait une équation algébrique $F(x, y) = 0$ liant les deux variables x et y , correspondant aux deux fonctions elliptiques respectivement de modules κ et λ , et de périodes $(4K, 2iK')$ et $(4\Lambda, 2i\Lambda')$, puisqu'on montre en effet que⁽⁹⁶⁾

$$F(x, y) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} M.p(4\Lambda) = m(4K) + m'(2iK') \\ M.q(2i\Lambda') = n(4K) + n'(2iK') \end{cases}$$

mais du même coup il devient possible aussi de contrôler la forme du multiplicateur M en fonction des coefficients de la transformation sur les périodes.

Dans la note mentionnée plus haut, Siegel souligne explicitement la filiation qui lie le théorème du doublement d'arc de Fagnano et la généralisation aux théorèmes d'addition d'Euler à la conception de la multiplication complexe des fonctions elliptiques fondée sur le primat des modules singuliers.

⁽⁹⁵⁾ On remarque en particulier qu'en remplaçant t par $g^{-1}x = \frac{dx-b}{-cx+a}$ au dénominateur $\sqrt{(t-\epsilon_1)(t-\epsilon_2)(t-\epsilon_3)(t-\epsilon_4)}$, on obtient, pour chaque facteur, $t-\epsilon_i = \lambda \cdot (x - g\epsilon_i)$ où λ a une forme qui permet la simplification.

⁽⁹⁶⁾ En prenant les quotient des expressions, on obtient une transformation à coefficients entiers sur les rapports de périodes $\left(\frac{2i\Lambda'}{4\Lambda}\right) = \frac{pn' \left(\frac{2iK'}{4K}\right) + pn}{qm' \left(\frac{2iK'}{4K}\right) + qm}$.

Il fallait l'habileté algébrique très au-dessus du commun d'Euler pour ériger le théorème d'addition des intégrales elliptiques de première espèce, pour lequel en effet seuls existent en général des multiplicateurs rationnels. En revanche, la découverte explicite de la multiplication complexe pour un module singulier ne date que du début du dix-neuvième siècle, soit environ un siècle après le doublement de l'arc de lemniscate par Fagnano, et la généralisation aux fonctions abéliennes n'est toujours pas achevée du point de vue arithmétique-analytique.⁽⁹⁷⁾

L'intérêt principal de l'interprétation des substitutions de Fagnano proposée par C. L. Siegel ne réside pas dans la reconstruction, comme telle contestable, de la démarche qui conduisit à la formule du doublement de l'arc, mais tient bien plutôt au fait qu'elle permet d'apercevoir les connexions qui, dans la perspective de L. Kronecker, lient la discipline de l'« analyse algébrique arithmétique »⁽⁹⁸⁾ d'une part, et la conception de la multiplication complexe des fonctions elliptiques comme « cas limite » de la transformation⁽⁹⁹⁾ d'autre part. Le souci de promouvoir une analyse plus pénétrante des courbes elles-mêmes au lieu de simplement les rapporter les unes aux autres qui caractérisait l'approche d'Euler dans le traitement de la lemniscate, et qui précisément, selon Legendre, l'aurait empêché d'entrer dans la voie royale de la théorie des fonctions elliptiques, faute d'avoir su faire « varier les paramètres des fonctions », témoigne cependant d'une exigence d'articulation des propriétés géométriques aux propriétés algébriques arithmétiques des courbes censée servir l'appréhension de leur raison interne. Nous avons vu que dans la forme dans laquelle Fagnano présente les substitutions dont l'enchaînement produit le doublement de l'arc, l'intégrale intermédiaire n'est pas lemniscatique. En termes modernes, on dirait⁽¹⁰⁰⁾ que les transformations de Fagnano sont des transformations de degré 2 entre les courbes elliptiques $t^2 = 1 - z^4$ et $w^2 = 1 + u^4$. En remplaçant u par ξu , on obtient les formules de la multiplication complexe par $1 \pm i$ sur la courbe $t^2 = 1 - z^4$. La multiplication de la variable auxiliaire par la racine huitième de l'unité suffit à dégager la structure arithmétique du théorème du doublement d'arc qui se présentait d'abord sous une forme

⁽⁹⁷⁾ [Sie59, p. 251], cf. *infra*, Appendice B.

⁽⁹⁸⁾ La généralisation de la cyclotomie à la lemniscatomie constitue le point de départ de cette discipline nouvelle, issue des *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, que C. Goldstein et N. Schappacher [GS7a] conviennent de nommer « analyse algébrique arithmétique ».

⁽⁹⁹⁾ Cf. [PS07, p. 356, en particulier la note de Hilbert sur le rôle privilégié accordé par Kronecker aux modules singuliers].

⁽¹⁰⁰⁾ Cf. [Wei84, p. 306].

inadéquate. Les irrationnelles quadratiques, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, qui n'appartenaient pas essentiellement au contenu du doublement d'arc, disparaissent, et laissent place à un produit d'entiers algébriques dans l'anneau $Z[i]$, $(1+i)(1-i) = 2$. L'enchaînement des substitutions ne conduit plus alors désormais à sortir du « réseau du points » associé à l'intégrale lemniscatique, et constitue de ce fait une opération interne à ce même réseau. Par conséquent la procédure d'arithmétisation correspond ici à une forme d'internalisation par laquelle les propriétés géométriques de la courbe sont réflexivement ressaisies grâce aux propriétés arithmétiques des entiers algébriques correspondants et s'y subordonnent en quelque sorte puisque les dernières recèlent la raison des premières. Quoiqu'elles aient un sens géométrique en termes de reparamétrisation de la courbe, les substitutions sont en effet comprises plus profondément lorsqu'elles sont comprises arithmétiquement. Sans doute la généralisation des idées en germe dans les travaux de Fagnano et d'Euler requerrait-elle l'extension à un point de vue analytique-arithmétique et par conséquent une forme d'arithmétisation plus subtile se servant de l'analyse pour dégager ce qui ne peut l'être par les seuls moyens de l'arithmétique⁽¹⁰¹⁾, mais, comme le suggère l'interprétation de la formule du doublement de l'arc de lemniscate, l'idéal d'arithmétisation que défendait Kronecker portait sans doute aussi d'emblée plus loin que le programme d'algèbre arithmétique censé lui donner corps⁽¹⁰²⁾.

⁽¹⁰¹⁾Cf. [GS7a, p. 51]. « *we saw him stress the role of analysis as being able to deliver to arithmetic what is hard or impossible to come by in a purely arithmetic way.* » ; « *At the same time, as is well-known, Kronecker forcefully propagated a general arithmetic which was to actually contain analysis, and a foundational view of mathematics where rigour ultimately should be based only on natural integers (...)* At least the technical parts of his papers on elliptic functions seem unaffected by this creed. »

⁽¹⁰²⁾Dans ses *Leçons sur la théorie des nombres*, Kronecker met en garde contre une délimitation trop étroite du domaine de l'Arithmétique et subordonne l'idée même d'arithmétisation à la saisie de ce qu'il nomme l'« essence arithmétique » des contenus mathématiques. Cf. [Kro01, Leçon I, §2, p. 4-5] : « [...] la délimitation, exigée par la définition de Gauss, de l'Arithmétique par rapport à l'Analyse et l'application des méthodes fondées essentiellement sur elle écartaient les grandeurs continues du domaine de la théorie des nombres. Une telle délimitation paraissait toutefois s'imposer à une époque où l'on concevait encore de telles quantités géométriquement ; mais elle est devenue caduque depuis qu'on s'est efforcé récemment de définir de nombreuses grandeurs issues de la mécanique ou de la géométrie sans tenir compte de cette origine, ce par quoi leur essence purement arithmétique [*ihr rein arithmetisches Wesen*] vient au premier plan. [...] De l'Analyse qui s'est affranchie de sa source originaire, la Géométrie, et qui s'est développée en un corps libre autonome, l'Arithmétique ne peut donc pas se couper, et elle le peut d'autant moins que Dirichlet a

Appendice A

C. L. Siegel et l'histoire des mathématiques

Comme en témoignent certaines traditions orales et épistolaires dans les mathématiques du XX^{ème} siècle, il semble que « la perfection et la profondeur »⁽¹⁾ de la pensée mathématique s'alliait, chez C. L. Siegel, à un sentiment non moins profond d'insatisfaction face aux tendances principales de son époque. Cette disposition le conduisit, en certaines circonstances, à formuler des jugements abrupts où la conviction affirmée d'un certain idéal de mathématiques confinait à la provocation. Ainsi écrivait-il quelque peu à l'emporte-pièce en 1959, dans une lettre à A. Weil :

La dégénérescence des mathématiques a commencé avec les idées de Riemann, Dedekind et Cantor qui ont progressivement refoulé le génie sûr d'Euler, Lagrange et Gauss⁽²⁾.

Quelques années plus tard, de façon plus dramatique encore, dans une lettre à L. J. Mordell du 3 mars 1964, il assure ce dernier de son soutien dans la controverse qui l'oppose à S. Lang, à l'occasion de la recension de la *Diophantine Geometry*⁽³⁾ [1962] de ce dernier, et dit partager pleinement l'appréciation

réussi à atteindre précisément les résultats arithmétiques les plus beaux et les plus profonds au moyen de la combinaison des méthodes des deux disciplines. »

⁽¹⁾Cf. [Die]. « ... the perfection and thoroughness of his papers did not leave much room for improvement with the same technique, [and this] discouraged many research students because to do better than he required new methods. »

⁽²⁾DMV Mitteilungen 1993-4, 17. « Die Entartung des Mathematik begann mit den Ideen von Riemann, Dedekind und Cantor, durch die der solide Geist von Euler, Lagrange und Gauss mehr und mehr zurückgedrängt wurde. »

⁽³⁾Sur le contexte de la réception de ce livre et la différence de style entre les deux communautés concernées, spécialistes de géométrie algébrique et théoriciens des nombres, cf. le point de vue équilibré de [Mat64, p. 1060] : « «*Diophantine geometry* » by abuse of language is what an algebraic geometer sees when he looks at Diophantine equations : points on algebraic varieties whose coordinates are rational numbers or integers. The two big theorems of the subject - Siegel's proof that an algebraic curve of positive genus has only finitely many integral points, and the Mordell-Weil theorem that the rational points on an abelian variety form a finitely generated group - were proved thirty-odd years ago. ... The author presents these results, dressed up and stylishly generalized, to an audience composed primarily of algebraic geometers. ... The author's taste is impeccable, and the cognoscenti - those who have gone to André Weil's school of algebraic geometry - will find this book deeply rewarding. On the other hand, it will probably be alien corn for the number theorists. They will certainly find no numbers here, and the two central proofs are so deeply imbedded in geometry that even to extract a proof of the relatively elementary theorem of Mordell would require heavy surgery. Unless they are willing to bone up on the author's two previous books on algebraic geometry, «*Diophantine geometry* » is likely to remain for them a closed book. ».

sévère portée par Mordell à l'encontre du style de mathématiques alors dominant⁽⁴⁾ :

J'ai peur que les mathématiques ne périssent avant la fin de ce siècle
si la tendance présente à l'abstraction dénuée de sens - ou comme je
l'appelle la théorie de l'ensemble vide - ne peut pas être bloquée.⁽⁵⁾

Le refus de ce qu'il estimait être une propension à l'abstraction vide⁽⁶⁾ et à la généralité inutile⁽⁷⁾ qui constitue sans doute un trait essentiel de la personnalité intellectuelle de C. L. Siegel allait de pair avec un intérêt réel pour l'histoire des mathématiques. Avec ses collègues de l'Université de Francfort, il participe de 1922 à 1935 au séminaire d'histoire des mathématiques dont Max Dehn⁽⁸⁾

⁽⁴⁾La recension de L. J. Mordell ainsi que la lettre de Siegel ont été publiées par S. Lang lui-même dans un article (cf. [Lan95]) dans lequel il revient sur les circonstances de cette vive querelle, révélatrice de l'évolution des mathématiques de la seconde moitié du XXème siècle. L'ensemble de ces pièces figure désormais en annexe de la réédition de *Diophantine Geometry*.

⁽⁵⁾[Lan95]. « *When I first saw [Lang's «Diophantine geometry »] about a year ago, I was disgusted with the way in which my own contributions to the subject had been disfigured and made unintelligible. ... The whole style of the author contradicts the sense of simplicity and honesty which we admire in the works of the masters in number theory. ... I am afraid that mathematics will perish before the end of this century if the present trend for senseless abstraction - as I call it : theory of the empty set - cannot be blocked up.* »

⁽⁶⁾En dépit du tour polémique de ces échanges, voire même de la virulence des attaques dont Lang fit l'objet et dont il semble d'ailleurs s'être délecté (cf. [Hin06]), une appréciation exacte des enjeux épistémologiques de cette querelle serait souhaitable. Il s'agirait ainsi d'aborder de front la question de la fécondité de l'abstraction, revendiquée par les uns et contestée par les autres, c'est-à-dire en l'occurrence la question de l'usage des méthodes de géométrie algébrique en théorie des nombres, sans toutefois occulter ce que le recours à ces méthodes fait perdre en insérant profondément les résultats de théorie des nombres dans une châsse de langage géométrique.

⁽⁷⁾Siegel n'incriminait évidemment qu'un certain usage qu'il jugeait dévoyé des mathématiques abstraites où les contenus sont noyés dans les formulations, mais non cette part de l'héritage des mathématiques du XIXème siècle qui a pu donner lieu ensuite à cet usage, comme en témoigne cette allusion significative de H. Davenport faisant état de conversations avec Siegel lors d'un séjour à Göttingen en 1966 : « *He takes a rather severe view of most contemporary mathematics ! .. [nevertheless] Siegel pointed out that Dedekind, regarded as a pioneer in abstract mathematics, was in fact very cautious about introducing unnecessary generality. In the 4th edition of D-D [i.e. Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie with Dedekind's appendices] he states explicitly that an algebraic number field is part of the complex field. In the 2nd and 3rd editions he had used more general language.* ». [Dav85, p. 77].

⁽⁸⁾C. L. Siegel décrit en ces termes l'influence de Max Dehn sur le groupe de Francfort : « *Dehn's lectures were especially stimulating by virtue of the new ideas they contained ... It was fascinating to note the interest Dehn showed for all aspects of intellectual life outside his own field. His was a philosophical mind in the sense of Schiller and, since he was fond of contradicting, a conversation with him often led to fruitful discussion. Dehn was well versed in ancient and modern history ... The seminar on the history of mathematics, which lasted*

était l'âme et qui réunissait professeurs et étudiants autour d'une œuvre originale différente chaque semestre, dans le but d'« accroître la compréhension que les participants pouvaient avoir des résultats présentés dans les cours »⁽⁹⁾. Le souci de l'histoire était ainsi manifestement censé servir l'exigence d'une appréhension plus profonde des contenus mathématiques.

Appendice B

« Pour la préhistoire du théorème d'addition d'Euler »

Carl Ludwig Siegel

Gesammelte Abhandlungen, vol. III, 249-251.

De toutes les découvertes d'Euler, c'est bien le théorème d'addition des intégrales elliptiques qui a exercé la plus grande influence sur le développement ultérieur de l'analyse au 19^{ème} siècle. Dans les recherches de ce géomètre, ce théorème se présente d'abord en 1753 comme un théorème valant pour le cas lemniscatique. Dans un mémoire lu devant l'Académie de Berlin le 27 janvier 1752 [Eul61b], Euler avait en effet traité du problème spécial consistant à additionner deux arcs mesurés à partir du point double de la lemniscate, si l'un est égal à n fois l'autre, pour $n = 1, 2, \dots$. Dans ce texte, Euler mentionne le fait que c'est à Fagnano qu'il revient d'avoir trouvé la formule correspondante pour le cas $n = 1$, par conséquent pour le doublement d'arc de la lemniscate.

Fagnano avait envoyé à l'Académie de Berlin, dont il était devenu membre, ses œuvres complètes [Fag50] parues en 1750, et Euler eut l'ouvrage entre les mains le 23 décembre 1751. On doit la communication de ce fait à Jacobi [SA08, p. 23] qui, dans les années quarante du 19^{ème} siècle, s'était occupé de l'édition complète à Berlin des œuvres d'Euler dont le plan avait déjà été arrêté par l'Académie de Saint-Petersbourg. Il écrit : « À cette occasion, j'ai trouvé une date extrêmement importante pour l'histoire des

13 years under Dehn's aegis, was founded in 1922. Dehn was the real soul of this institution ... due to his outstanding and universal learning, Dehn was in a sense our spiritual leader, and we always followed his advice when choosing the topics for each semester » Cf. [Sie79, p. 224-226]. À propos de l'approche originale de l'histoire des mathématiques qui prévalait à Francfort, A. Weil écrit dans une lettre à sa sœur : « ... si la critique d'art est un genre vain et vide, l'histoire de l'art est peut-être possible : et l'on n'a jamais que je sache, examiné l'histoire des mathématiques de ce point de vue (à l'exception de Dehn, autrefois à Francfort, maintenant à Trondheim en Norvège, mais qui n'a jamais rien écrit là-dessus). Et il est tout à fait vain de se lancer là-dedans sans une étude approfondie des textes. » Cf. [Wei80, p. 255].

⁽⁹⁾[Sie79, p. 226]. « *Several articles in mathematical journals resulted from the activities of the Frankfurt history of mathematics seminar, but on the whole, publication was not our goal. The real thrust of the seminar lay in an altogether different direction, namely, to increase the understanding of the participants for the results presented in the lectures.* »

mathématiques, le jour où notre Académie a demandé à Euler d'examiner le travail que Fagnano qui lui avait été envoyé, avant de donner une réponse à l'auteur. La théorie des fonctions elliptiques est issue de cet examen. »

Fagnano était conscient qu'avec le doublement d'arc de la lemniscate il avait obtenu un résultat d'une valeur impérissable, car il fit apposer une lemniscate comme ornement sur la page de titre de son œuvre. Et cependant sa découverte était déjà disponible sous forme imprimée [**Fag18a**, **Fag18b**] depuis plus de trente ans sans que ses contemporains en aient reconnu l'importance.

Dans le travail mentionné, Euler vérifie que de

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}$$

on peut tirer l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \frac{2dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

Il avait emprunté cela au mémoire de Fagnano, où l'on trouve ces formules, à l'intervention de u et de z près. Mais chez Fagnano, elles sont le résultat de l'élimination de la variable auxiliaire x au moyen des deux substitutions

$$x = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}}{z}, \quad x = \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{1-u^4}}$$

qui correspondent aux équations différentielles

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{1-u^4}}$$

La première substitution peut être écrite sous une forme plus simple

$$z = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

Fagnano n'indique pas par quelle voie il est arrivé à ces substitutions. Je voudrais formuler la conjecture qu'il peut avoir cherché à rationaliser la différentielle lemniscatique au moyen d'une substitution algébrique, par analogie avec l'uniformisation de la racine carrée des polynômes du second degré, et que par là il avait en quelque sorte devant les yeux le système de formules

$$\begin{aligned} z &= \frac{2x}{1+x^2} & x &= \frac{2u}{1-u^2} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= \frac{2dx}{1+x^2} & \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{2du}{1-u^2} \end{aligned}$$

Les relations ci-dessus s'obtiennent simplement en remplaçant z, x, u par leurs carrés dans ces formules. Cependant rien dans les écrits de Fagnano ne peut étayer ma conjecture.

Faisons en outre observer que le résultat de Fagnano relève essentiellement de la théorie de la multiplication complexe. C'est-à-dire que si on pose

$$1 + i = \mu \quad \sqrt{2}x = \mu t$$

alors ses formules se changent en

$$\begin{aligned} z &= \frac{\mu t}{\sqrt{1-t^4}}, & t &= \frac{\bar{\mu} u}{\sqrt{1-u^4}} \\ \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} &= \frac{\mu dt}{\sqrt{1-t^4}}, & \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} &= \frac{\bar{\mu} du}{\sqrt{1-u^4}} \end{aligned}$$

Par conséquent il s'agit de la multiplication de la différentielle lemniscatique de première espèce par les facteurs complexes $\mu = 1 + i$ et $\bar{\mu} = 1 - i$. La découverte de Fagnano fut par conséquent rendue possible par la circonstance que i est le module de la fonction lemniscatique et que $\mu\bar{\mu} = 2$. La formule de transformation pour la multiplication par $\mu, \bar{\mu}$ est de forme plus simple que la formule qui s'obtient par composition, et c'est cela qui compte manifestement dans le succès de Fagnano. Il fallait l'habileté algébrique très au-dessus du commun d'Euler pour ériger le théorème d'addition des intégrales elliptiques de première espèce, pour lequel en effet seuls existent en général des multiplicateurs rationnels. En revanche, la découverte explicite de la multiplication complexe pour un module singulier ne date que du début du dix-neuvième siècle, soit environ un siècle après le doublement de l'arc de lemniscate par Fagnano, et la généralisation aux fonctions abéliennes n'est toujours pas achevée du point de vue arithmétique-analytique.

Références

- [Abe27] N. H. ABEL – « Recherches sur les fonctions elliptiques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **2-3** (1827), p. 101–181, 160–190, repris dans [Abel 1881], p. 263–388.
- [Abe28a] ———, « Addition au mémoire précédent », *Astronomische Nachrichten* **7** (1828), no. 147, repris dans [Abel 1881], p. 429–443.
- [Abe28b] ———, « Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques », *Astronomische Nachrichten* **6** (1828), no. 138, repris dans [Abel 1881], p. 403–428.
- [Abe81] ———, *Œuvres complètes*, vol. I, Grøndahl, Christiana, 1881.
- [Ayo84] R. AYOUB – « The Lemniscate and Fagnano's Contributions to Elliptic Integrals », *Archive Hist. Exact Sciences* **29** (1984), no. 2, p. 131–149.

- [Ber94a] J. BERNOULLI – « Constructio curvæ accessus & recessus aequabilis, ope rectificationis curvæ cujusdam algebraicæ, addenda nuperæ solutioni mensis junii », *Acta Eruditorum* (1694), repris dans *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, éd. par Herman H. Goldstine, Birkhäuser, 1991, Jac. Op. LX, p. 188-192.
- [Ber94b] J. BERNOULLI – « De curvatura laminæ elasticæ. ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expansi. radii circulatorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam theorematibus huc pertinentibus, &c. », *Acta Eruditorum* (1694), partiellement repris dans *Die Werke von Jakob Bernoulli*, éd. par David Speiser, Birkhäuser, 1999, tome 5, Op. LVIII, p. 113-118.
- [Ber94c] ———, « Solutio problematis leibnitiani de curva accessus & recessus aequabilis a puncto dato, mediante rectificatione curvæ elasticæ », *Acta Eruditorum* (1694), repris dans *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli*, éd. par Herman H. Goldstine, Birkhäuser, 1991, Jac. Op. LIX, p. 174-180.
- [Ber94d] J. BERNOULLI – « Constructio facilis curvæ recessus aequabilis a puncto dato, per rectificationem curvæ algebraicæ », *Acta Eruditorum* (1694), repris dans *Opera Omnia Johann Bernoulli*, éd. J. E. Hofmann, Georg Olms, Hildesheim, volume I, 1968. XIX, p. 119-122.
- [Bos81] H. BOS – « On the Representation of Curves in Descartes' *Géométrie* », *Archive for the History of Exact Sciences* **24** (1981), p. 295-308.
- [Bos93] ———, *Lectures in the History of Mathematics*, Hist. Math. Series, vol. 7., American Mathematical Society, 1993.
- [Cou61] A. A. COURNOT – *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, Paris, 1861, réédition Hachette, 1922.
- [Cou75] ———, *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Étude sur l'emploi des données de la science en philosophie*, Paris, 1875, réédition dans *Œuvres complètes*, tome V, éd. C. Salomon-Bayet, Paris, Vrin, 1979.
- [Dav85] H. DAVENPORT – « Reminiscences of Conversations with Carl Ludwig Siegel », *Mathematical Intelligencer* **7** (1985), no. 2, p. 76-113.
- [Die] J. DIEUDONNÉ – *1970-1990*, Dictionary of Scientific Biography, New-York.
- [Enn90] A. ENNEPER – *Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte*, 2 éd., Nebert, Halle, 1890.
- [Eul61a] L. EULER – « De integratione æquationis differentialis $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **6** ((1756/7) 1761), p. 37-57, repris dans *Mathematische Werke*, Leipzig et Berlin, 1912, I 20, *Commentationes analyticæ*, Commentatio 251. p. 80-107.
- [Eul61b] ———, « Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **6** ((1756/7) 1761), p. 58-84, repris dans *Mathematische Werke*, Leipzig et Berlin, 1912, I 20, *Commentationes analyticæ*, Commentatio 252. p. 80-107.
- [Eul61c] ———, « Specimen novæmethodi curvarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi », *Novi comm.*

- acad. sci. Petrop.* **7** ((1758/9) 1761), p. 83–127, repris dans *Mathematische Werke*, Leipzig et Berlin, 1912, I 20, *Commentationes analyticæ*, Commentatio 263. p. 108-152.
- [Fag15] G. C. FAGNANO – « Nuovo metodo per rettificare la differenza di due archi (uno de' quai è dato) in infinite specie di parabole irretificabili, ... e colla maniera di tagliare per metà il quadrante della curva lemniscata », *Giornale de' Letterati d'Italia* **20** (1715), p. 229 et suivantes, repris dans les *Produzioni matematiche*, tome II, Pesaro, 1750. p. 317-330.
- [Fag18a] ———, « Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma I », *Giornale de' Letterati d'Italia* **29** (1718), p. 258 et suivantes, repris dans les *Produzioni matematiche*, tome II, Pesaro, 1750. p. 343-348.
- [Fag18b] ———, « Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma II », *Giornale de' Letterati d'Italia* **30** (1718), p. 87 et suivantes, repris dans les *Produzioni matematiche*, tome II, Pesaro, 1750. p. 356-368.
- [Fag19] ———, « Giunte a questo primo schediasma sopra la misura della lemniscata », *Giornale de' Letterati d'Italia* **30** (1719), p. 197 et suivantes, repris dans les *Produzioni matematiche*, tome II, Pesaro, 1750. p. 349-355.
- [Fag50] ———, *Produzioni matematiche*, vol. 2, Pesaro, 1750, réédition dans *Opere matematiche*, 1- 2, Milan-Rome-Naples, 1911.
- [Gau01] C. F. GAUSS – *Disquisitiones arithmeticae*, 1801, *Werke*, vol. I, Göttingen, Dieterich, 1863.
- [Gau14] ———, « Abdruck des Tagebuchs (Notizenjournals) », (1796-1814), repris dans *Werke*, vol. X.1, Göttingen, Dieterich, 1863, p. 483-574.
- [Gau31a] ———, « Anzeige der « Theoria residuorum biquadraticorum » », (1831), *Werke*, vol. II, Göttingen, Dieterich, 1863, pp. 169-178.
- [Gau31b] ———, « « Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen » von Ludwig August Seeber », *Göttingische gelehrte Anzeigen* (1831), *Werke*, vol. II, Göttingen, Dieterich, 1863, pp. 188-196.
- [Gau31c] ———, « Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda », (1831), *Werke*, vol. II, Göttingen, Dieterich, 1863, p. 99-148.
- [GS7a] C. GOLDSTEIN & N. SCHAPPACHER – « A book in search of a discipline (1801-1860) », (2007a), dans *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg, Springer, 3-65.
- [GS07a] ———, « Several disciplines and a book (1860-1901) », (2007), dans *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg, Springer, 67-103.
- [GS⁺07b] C. GOLDSTEIN, N. SCHAPPACHER et al. (éds.) – *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007.
- [Hin06] M. HINDRY – « La géométrie diophantienne selon Serge Lang. Hommage à Serge Lang (1927-2005) », *Gazette des Mathématiciens* **108** (2006), p. 16–32, SMF.
- [Hou78] C. HOUZEL – « Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes », (1978), *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900*, réédition 1992, Paris, Hermann, p. 293-314.

- [Hou07] ———, « Elliptic Functions and Arithmetic », (2007), dans *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg, Springer, 291-312.
- [Jac28] C. G. J. JACOBI – « Notices sur les fonctions elliptiques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **3 & 4** (1828), repris dans [Jacobi 1881-1891], 249-275.
- [Jac29] ———, *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, Königsberg, 1829, epris dans [Jacobi 1881-1891], p. 49-138.
- [Jac91] ———, *Gesammelte Werke*, vol. 1, Reimer, Berlin, 1881-1891, éd. C. W. Borchardt.
- [Kle93] F. KLEIN – *The Evanston Colloquium. Lectures on Mathematics*, 1893, réédition Macmillan, New-York, 1984.
- [Kle96] ———, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1895/96*, Göttingen, 1896.
- [Kle26] ———, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Berlin, 1926, traduction anglaise par M. Ackerman, *Development of Mathematics in the 19th century* dans *Lie Groups : History, Frontiers and Applications*, vol. IX.
- [Kro57] L. KRONECKER – « Über die elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1857), p. 363–372, repris dans [Kronecker 1895-1931], vol. 4. p. 185-195.
- [Kro87] ———, « Über den Zahlbegriff », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (1887), no. 101, p. 337–355, repris dans [Kronecker 1895-1931], vol. 3. p. 249-274.
- [Kro91] ———, « Über den Begriff der Zahl in der Mathematik », (1891), éd. Boniface, J & Schappacher, N., « Sur le concept de nombre en mathématiques ». Cours inédit de Léopold Kronecker à Berlin. *Revue d'histoire des mathématiques* 7 (2001), 207-275.
- [Kro01] ———, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. I, Teubner, Leipzig, 1901, éd. K. Hensel.
- [Kro31] ———, *Werke*, Teubner, Leipzig, 1895-1931, éd. K. Hensel, 5 vols.
- [Lan62] S. LANG – *Diophantine Geometry*, Wiley, 1962, réédition augmentée sous le titre *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer, 1983.
- [Lan95] ———, « Mordell's Review, Siegel's Letter to Mordell, Diophantine Geometry and 20th century Mathematics », *Gazette des Mathématiciens* **63** (1995), p. 17–36, SMF.
- [Leg25] A. M. LEGENDRE – *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, vol. 1, Huzard-Courcier, Paris, 1825.
- [Lei89] G. W. LEIBNIZ – *La naissance du calcul différentiel*, Vrin, Mathesis, Paris, 1989, traduction française de Marc Parmentier.
- [Mat64] A. MATTUCK – « Review of *Diophantine Geometry* by S. Lang », *American Mathematical Monthly* **71** (1964), p. 1060.

- [PS07] B. PETRI & N. SCHAPPACHER – « On Arithmetization », (2007), dans *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin-Heidelberg, Springer.
- [Ros81] M. ROSEN – « Abel's Theorem on the Lemniscate », *American Mathematical Monthly* **88** (1981), p. 387–395.
- [SA08] P. STÄCKEL & W. AHRENS (éds.) – *Der Briefwechsel zwischen c. g. Jacobi und p. h. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhards Euler*, Leipzig, 1908.
- [Sch97] N. SCHAPPACHER – « Some Milestones in Lemniscatomy », *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series* **193** (1997), *Algebraic Geometry. Proceedings Bilkent Summer School, Ankara 1995*, éd. Sinan Sertöz, New York, Marcel Dekker.
- [Sie59] C. L. SIEGEL – « Zur Vorgeschichte des Eulerschen Additionstheorems », (1956/1959), dans *Sammelband Leonhard Euler, Akademie-Verlag Berlin*. Réédition dans *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III. 249-251.
- [Sie66] ———, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, Springer, Berlin, 1966.
- [Sie69] ———, *Topics in Complex Function Theory*, vol. I. Elliptic Functions and Uniformization Theory, Wiley, London, 1969, traduction en anglais par A. Shenitzer et D. Solitar.
- [Sie79] ———, « On the History of the Frankfurt Mathematics Seminar », *Mathematical Intelligencer* **1** (1978-1979), no. 4, p. 223–230.
- [Vla91] S. G. VLADUT – *Kronecker's Jugendtraum and Modular Functions*, Gordon & Breach, New-York, 1991.
- [Wei80] A. WEIL – *Œuvres scientifiques*, vol. I, Springer, 1980.
- [Wei84] ———, *Number Theory. An Approach through History from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, 1984.

15 avril 2008

IVAHN SMADJA, UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7 - CNRS UMR 7219, 15 AVRIL 2008